

# Квант

Научно-популярный  
физико-математический журнал

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12



Орбиты...

1989



## В номере:

Ежемесячный  
научно-популярный  
физико-математический  
журнал Академии наук СССР  
и Академии педагогических  
наук СССР



Москва. «Наука»  
Главная редакция физико-  
математической  
литературы

- 2 В. Н. Дубровский, Я. А. Смородинский. Оптическое изображение и проективная плоскость
- 9 А. В. Митрофанов. Прогулки с фотоаппаратом
- 18 О. В. Руденко, В. О. Черкезян. В мире мобильного звука
- 26 И. Ф. Акулич. Муравей на консервной банке
- Задачник «Кванта»**
- 30 Задачи M1181—M1185, Ф1188—Ф1192
- 31 Решения задач M1156—M1160, Ф1168—Ф1172
- 38 О свойствах центра окружности
- 40 **Калейдоскоп «Кванта»**
- «Квант» для младших школьников
- 42 Задачи
- 43 Ответы, ответы...  
**Школа в «Кванте»**  
Физика 8, 9, 10:
- 46 Относительность движения
- 48 Модуляция и модуляторы
- Математический кружок**
- 52 И. Ф. Шарыгин. Узнайте точку
- Есть идея?!
- 58 Физика и техническое творчество
- Р — значит ракета
- 60 В. Е. Белонучкин. Орбиты
- Игры и головоломки**
- 67 Проверьте свои способности
- Практикум абитуриента**
- 71 И. Г. Габович. Теорема о трех синусах
- Олимпиады**
- 73 Задачи Московской математической олимпиады
- 74 Избранные задачи Московской городской олимпиады по физике
- 75 Олимпиада по физике Ленинградского политехнического института
- 76 Всесоюзная заочная физико-математическая олимпиада МГТУ им. Н. Э. Баумана
- 77 Олимпиады по информатике в Киргизии
- 78 Ответы, указания, решения
- Наша анкета (79)**
- Смесь (51)**
- Наша обложка**
- 1 Кольца Сатурна (этот снимок был передан на Землю с американского космического аппарата «Вояджер-1» в ноябре 1980 года) — живое изображение орбит космических тел (см. статью на с. 60).
- 2 Репродукция картины Макса Эрнста «Евклид» (см. заметку «Вариации на тему Евклида» на с. 51).
- 8 Шахматная страничка.
- 4 Куб, сложенный из квадрата без ножниц и клея.

# ОПТИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ И ПРОЕКТИВНАЯ ПЛОСКОСТЬ

Кандидат физико-математических наук  
В. Н. ДУБРОВСКИЙ,  
доктор физико-математических наук  
Я. А. СМОРОДИНСКИЙ

Что общего между двумя темами, вынесенными в заглавие? Ответ будет интересным, он будет также и полезным. Мы познакомимся с ярким примером физической теории, превратившейся, по существу, в математическую. Такое превращение претерпели многие разделы физики. Все начинается с наблюдений, гипотез, с их экспериментальной проверки. Но по мере постижения сути предмета выкристаллизовывается несколько основных предпосылок, своего рода постулатов, из которых все результаты можно вывести уже чисто логическим путем. У нас речь пойдет о геометрической оптике. Начнем с того, что вспомним, как возникает изображение в оптической системе. А кончим... Но расскажем все по порядку.

## Изображения и отображения

Для того чтобы оптическая система работала, необходимо, чтобы пучок лучей света, исходящих из точечного источника (в геометрии такой пучок называется *центральной*), после прохождения системы снова превратился в центральный пучок. Тогда в центре преобразованного пучка возникнет изображение источника. Причем изображение может создаваться двумя путями: либо сами лучи света, выходя из оптической системы, собираются в одну точку — тогда говорят о *действительном изображении*; его можно увидеть, поместив в эту точку киноэкран или фотопленку (рис. 1, а); либо лучи на выходе из системы образуют расходящийся пучок, но их продолжения проходят через одну точку — тогда изображение назы-

вается *мнимым*, хотя его-то как раз и можно увидеть непосредственно (рис. 1, б). Наконец, если пучок лучей, поступающий в оптическую систему, является сходящимся (рис. 1, в), то говорят о *мнимом источнике*. Чем выше качество системы, тем точнее фокусируются пучки лучей. В идеале каждый точечный источник (действительный или мнимый)  $A$  имеет точечное изображение  $A'$  (также того или другого типа). Возникает отображение  $p$ , сопоставляющее точке  $A$  точку  $A'$ . Вот мы и постараемся выяснить, как устроено это отображение.

Начнем с простейшей «оптической системы» — плоского зеркала. Едва ли здесь что-то нужно объяснять: очевидно, что отображение  $p$  является *симметрией* относительно плоскости. Это отображение можно рассматривать для всех точек, в том числе и для точек «Зазеркалья»: мнимый источник в «Зазеркалье» создает действительное изображение перед зеркалом (рис. 2).

Второй пример — преломление света на плоской границе двух сред. Строго говоря, здесь изображение не создается. Чтобы лучи, выпущенные из одной точки, образовали после преломления центральный пучок, для них должно быть постоянно отношение  $\operatorname{tg} \varphi' / \operatorname{tg} \varphi$ , где  $\varphi$  и  $\varphi'$  — углы, составляемые падающим и преломленным лучом с нормалью к плоскости раздела сред (см. рис. 3). А в действительности преломление происходит по закону Снеллиуса:  $\sin \varphi' / \sin \varphi = k$ . Однако для лучей, почти перпендикулярных границе сред, т. е. с малыми углами  $\varphi$  и  $\varphi'$ , синусы в последней формуле можно с большой точностью



заменить на тангенсы, поэтому мы все же можем говорить об изображении (мнимом) и даже увидеть его, заглянув, например, в аквариум. Поскольку коэффициент  $k$  зависит только от сред, соответствующее отображение  $p$  будет *растяжением* от плоскости раздела, т. е. каждая точка перемещается перпендикулярно этой плоскости так, что ее расстояние до плоскости изменяется в одно и то же число раз (а именно, делится на  $k$ ; при  $k > 1$  естественнее назвать это отображение *сжатием*).

А как устроено отображение  $p$  для более сложных оптических систем? Оказывается, ответить на этот вопрос можно почти не вдаваясь в физические детали. Все, что нам необходимо, — это постулировать наличие точечного изображения любого точечного источника.

Для простоты мы предположим, что все происходит не в пространстве, а на плоскости  $\alpha$  — на ней расположены и источники, и их изображения.

В наших примерах ею могла бы быть любая плоскость, перпендикулярная поверхности зеркала или границе сред, а если рассматривается линза или система линз, имеющие ось симметрии, — любая плоскость, проходящая через эту ось. Толщиной нашей системы мы пренебрежем; тогда ее можно изобразить прямой линией  $l$  на плоскости  $\alpha$ , при встрече с которой лучи преломляются так, что центральный пучок с центром  $A$  преобразуется снова в центральный пучок с центром  $A' = p(A)$  (рис. 4, а).

Теперь мы совершим выход в пространство. Представим, что у нас имеется два совпадающих экземпляра плоскости  $\alpha$ . На первом будем отмечать источники, на втором — их изображения. Повернем второй экземпляр вместе со всеми изображениями вокруг оси  $l$  (рис. 4, б) — получится плоскость  $\alpha_1$ . Возьмем произвольную точку  $A$ , отметим ее изображение  $A'$  и соответствующую точку  $A_1$  в плоскости  $\alpha_1$ . Сейчас мы докажем, что все

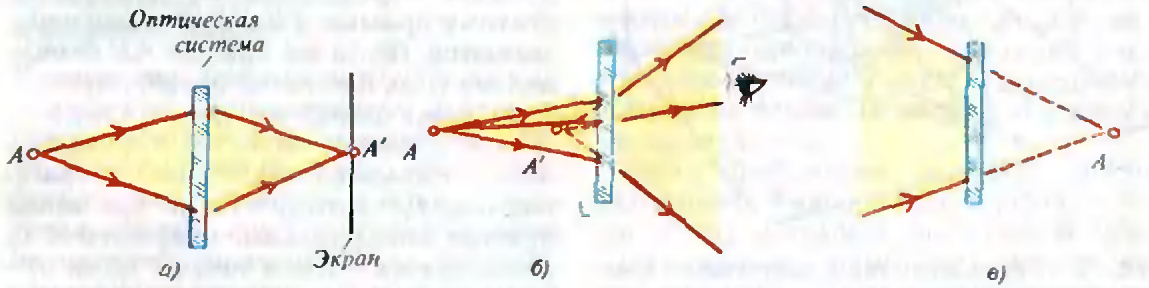


Рис. 1. Два типа источников света и их изображений: а — источник и изображение действительные; б — источник действительный, изображение мнимое; в — мнимый источник.

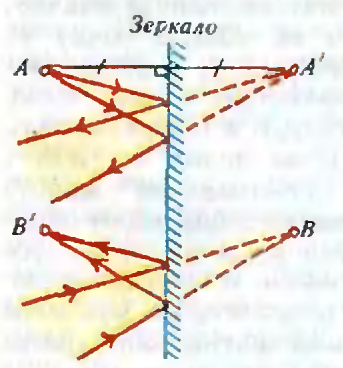


Рис. 2. Отражение в зеркале действительного (A) и мнимого (B) источников.

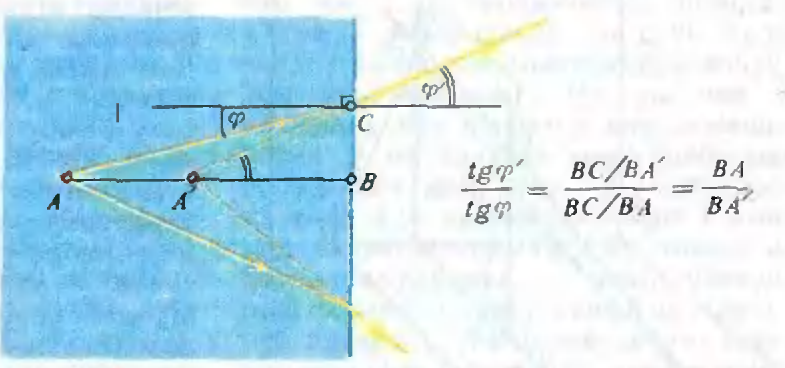


Рис. 3. Для того чтобы центральный пучок лучей после преломления оставался центральным, закон преломления должен был бы иметь вид  $\text{tg} \varphi' / \text{tg} \varphi = \text{const}$ .

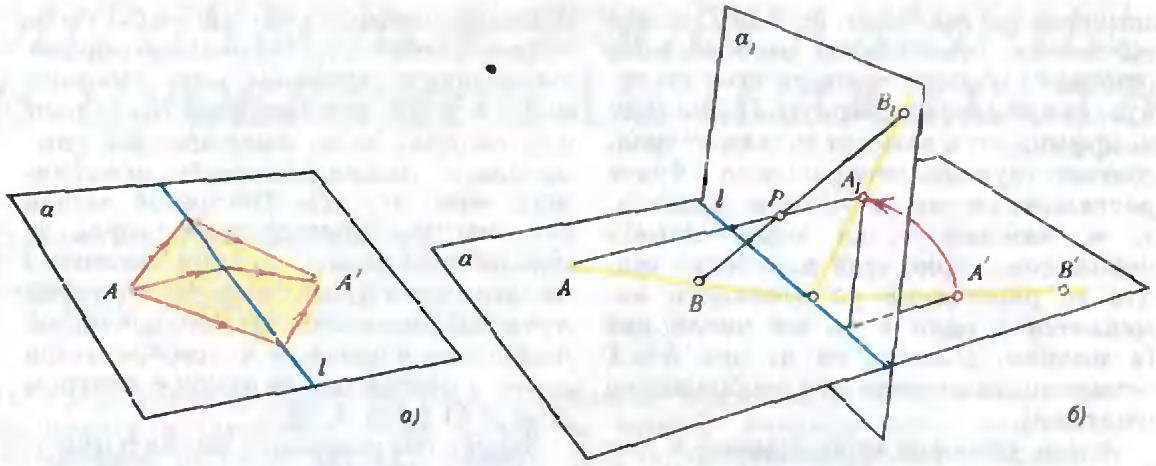


Рис. 4. С помощью выхода в пространство построение изображения в линзе сводится к центральной проекции.

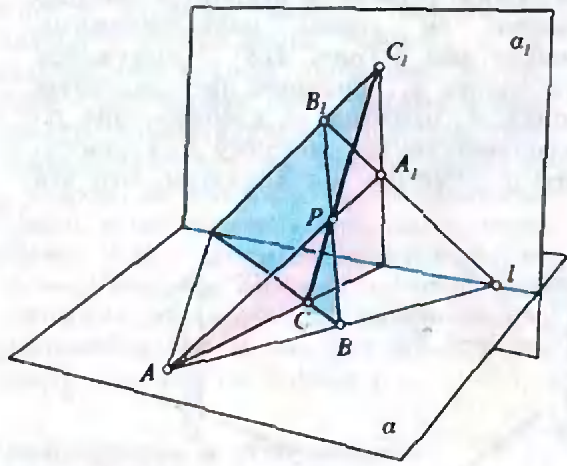


Рис. 5. К доказательству существования центра проекции.

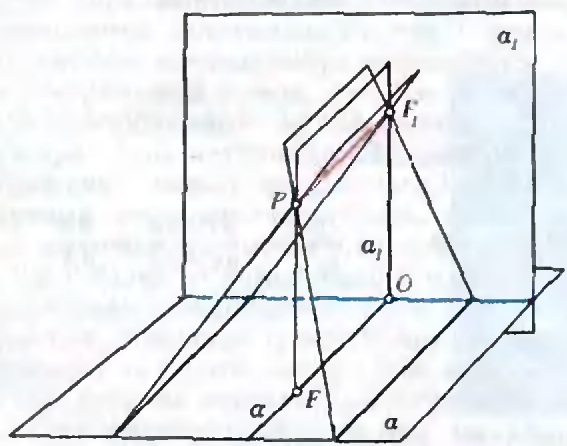


Рис. 6. Построение фокусов линзы.

прямые  $AA_1$  будут либо параллельны, либо будут пересекаться в одной точке.

Заметим, что четыре точки  $A, B, A_1$  и  $B_1$  всегда лежат в одной плоскости, ведь луч света, проходящий через  $A$  и  $B$ , после преломления на прямой  $l$  пройдет через  $A'$  и  $B'$  (рис. 4, б); поэтому прямые  $AB$  и  $A_1B_1$  тоже пересекаются. (Если же прямая  $AB$  параллельна  $l$ , то, как легко понять, прямая  $A_1B_1$  тоже параллельна  $l$ .) Следовательно, прямые  $AA_1$  и  $BB_1$  всегда либо параллельны, либо пересекаются. Допустим, что не все такие прямые параллельны, например  $AA_1$  пересекается с  $BB_1$  в точке  $P$ . Для любой точки  $C$  вне прямой  $AB$  прямая  $CC_1$  лежит в одной плоскости с  $AA_1$ , и в одной плоскости с  $BB_1$  (рис. 5). Поэтому она является прямой пересечения этих плоскостей, а значит, проходит через их общую точку  $P$ . Для точек, лежащих на  $AB$ , доказательство проводится аналогично, только пару точек  $A, B$  надо заменить на  $A, C$ , где  $C$  не лежит на  $AB$ .

Доказанное утверждение можно переформулировать следующим образом: отображение  $r_1$ , сопоставляющее точке  $A$  плоскости  $a$  соответствующую точку  $A_1$  плоскости  $a_1$ , является параллельной или центральной проекцией.

Ясно, что в рассмотренных нами примерах зеркального отражения и



преломления отображение  $p_1$  — это параллельная проекция. Но в случае линзы параллельная проекция уже возникнуть не может, хотя бы потому, что при такой проекции параллельные прямые переходят в параллельные, а линза, как известно, фокусирует параллельные лучи в точку. Поэтому для линзы и других оптических систем, превращающих параллельные пучки в центральные, отображение  $p_1$  является центральной проекцией. А поскольку все прямые  $A_1A_1'$  в силу нашего построения параллельны друг другу, можно сделать вывод, что преобразование  $p$  плоскости, описывающее изображение в линзе, является композицией центральной проекции ( $A \rightarrow A_1$ ) и параллельной проекции ( $A_1 \rightarrow A_1'$ ). Для оптических приборов, состоящих из нескольких линз и зеркал, отображение  $p$  будет композицией нескольких центральных и параллельных проекций. По определению, такие отображения называются проективными.

### Центральная проекция и формула линзы

Прежде чем пожинать плоды наших построений применительно к линзе, сделаем существенную оговорку. Лучи, выпущенные из одного источника, фокусируются линзой в точку лишь тогда, когда они проходят вблизи от главной оптической оси (прямой, проходящей перпендикулярно к линзе через ее центр). Мы допускаем идеализацию, рассматривая отображение  $p$  на всей плоскости. Но истина от этого не страдает, потому что все наши рассуждения можно с тем же успехом повторить и для любой, даже сколь угодно малой области на плоскости.

Итак, применим к линзе наше построение. Пусть  $a$  — ее главная оптическая ось,  $a_1$  — соответствующая ей прямая в плоскости  $a_1$ ,  $P$  — центр проекции  $p_1$ . Ясно, что все прямые, параллельные  $a$ , при этой проекции перейдут в прямые, проходящие через одну и ту же точку  $F_1$  прямой  $a_1$  (рис. 6) — параллельную проекцию точки  $P$  на плоскость  $a_1$  вдоль прямой  $a$ . Следовательно, пучок лучей,

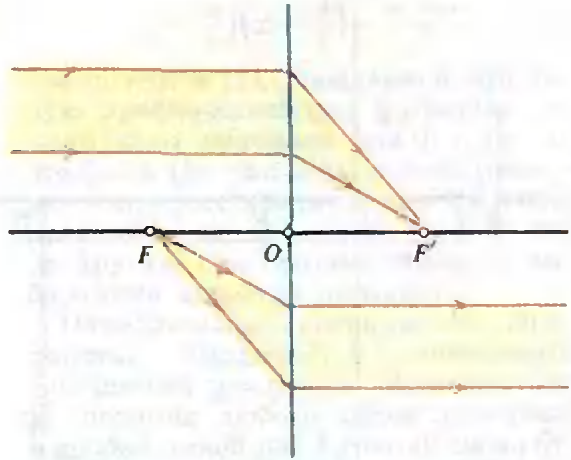


Рис. 7. Оптические свойства фокусов.

параллельных главной оси, пройдя линзу, собирается в точке  $F'$  главной оси (рис. 7), соответствующей точке  $F_1$ :  $OF' = OF_1$ , где  $O$  — центр линзы. Аналогично, лучи, выходящие из точки  $F$  — проекции  $P$  на плоскость  $a_1$ , пройдя линзу, становятся параллельными главной оси. Точки  $F$  и  $F_1$  называются фокусами линзы. Можно доказать, что для системы из одной линзы фокусные расстояния  $f = OF$  и  $f' = OF'$  одинаковы; для более сложных систем они могут быть различны.

Зная положение фокусов, легко построить изображение любой точки  $A$ , не лежащей на главной оси, проследив за двумя исходящими из нее лучами — лучом, параллельным оси, и лучом, проходящим через фокус  $F$  (рис. 8). Это построение хорошо известно. Подчеркнем еще раз, что мы с необходимостью пришли к нему, основываясь по сути дела только на нашем «постулате о точечном изображении». На рисунке 8 показано, как строится изображение точки  $B$  на главной оси. Здесь мы пользуемся тем, что изображением прямой  $AB$ , перпендикулярной этой оси, является прямая  $A'B'$ , также ей перпендикулярная, — факт, очевидный из рассмотрения нашей центральной проекции. Столь же просто устанавливаются с помощью центральной проекции и другие свойства изображений, создаваемых идеальной лин-

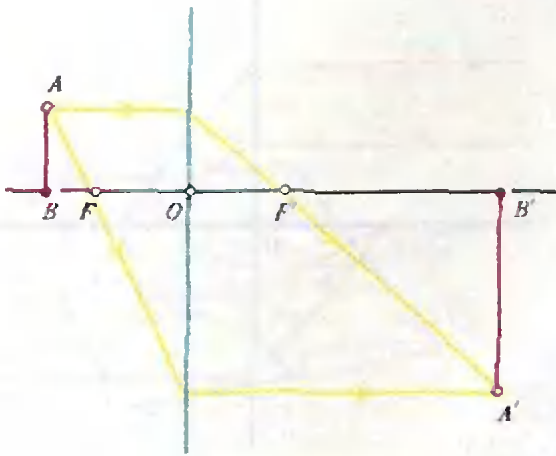


Рис. 8. Построение изображения по фокусам.

зой. Ясно, например, что изображением любой прямой будет прямая (попробуйте доказать это, пользуясь непосредственно построением рисунка 8!). Правда, строго говоря, это свойство выполняется с одним исключением: прямая, проходящая через фокус  $F$  перпендикулярно главной оси, никак не изображается, потому что лучи, выходящие из любой ее точки, преобразуются линзой в параллельные. К этому важному замечанию мы еще вернемся.

Как связаны расстояния  $r = OA$  и  $r' = OA'$  от центра линзы  $O$  до точки  $A$  на главной оси и до ее изображения  $A'$ ? И здесь ответ легко получается с помощью центральной проекции. Из рисунка 9 видно, что

$$\frac{OF}{OA} + \frac{OF'}{OA'} = \frac{OF}{OA} + \frac{OF_1}{OA_1} = \frac{A_1P}{A'A} + \frac{PA}{A'A} = \frac{A'A}{A'A} = 1,$$

т. е.

$$\frac{f}{r} + \frac{f'}{r'} = 1. \quad (1)$$

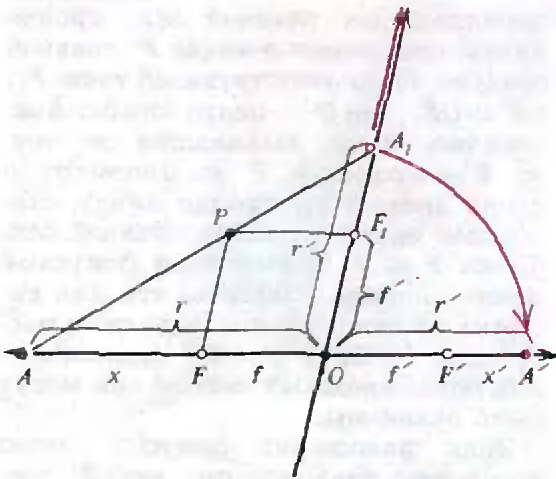


Рис. 9.  $f/r + f'/r' = 1$  (формула линзы).

В частности, при  $f = f'$  выполняется так называемая «формула линзы»  $1/r + 1/r' = 1/f$ . Эти равенства останутся в силе и для точек  $A$  на отрезке  $OF$  и на луче  $OF'$ , если считать все отрезки направленными, а величины  $r$  и  $r'$  — координатами точек  $A$  и  $A'$  на главной оси с началом в точке  $O$ . При этом положительную полуось нужно

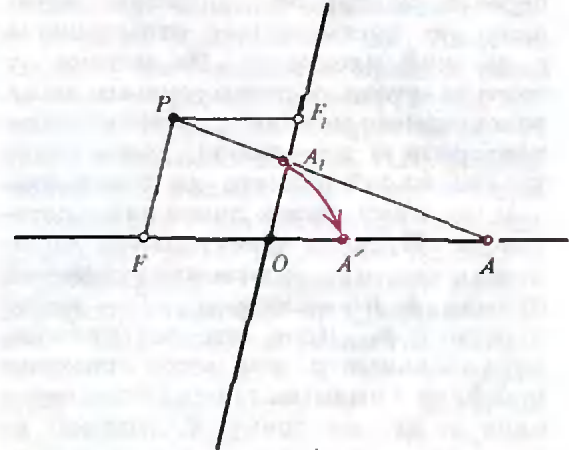
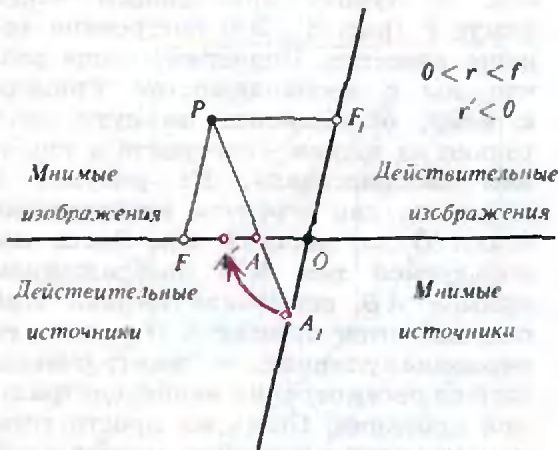


Рис. 10. Формула линзы верна при любом положении источника на главной оптической оси.



выбрать по-разному: для точек  $A$  — луч  $OF$ , а для изображений  $A'$  — луч  $OF'$ . Тогда положительные значения  $r$  и  $r'$  будут отвечать действительным источникам и изображениям, а отрицательные — мнимым (рис. 10).

Формулу (1) можно сделать более компактной, перенеся начало отсчета на «оси источников» в фокус  $F$ , а на «оси изображений» — в  $F'$ . Полагая в (1)  $r = f + x$ ,  $r' = f' + x'$  (см. рис. 9), после простых преобразований получим

$$xx' = ff' \quad (2)$$

— эта формула была известна еще Ньютону. На рисунке 11 она доказывается для  $x > 0$  непосредственно; аналогичное доказательство для других значений  $x$  предоставим читателю.

### Проективные преобразования прямой и двойное отношение

Выразим в формулах (1) и (2) координату изображения через координату источника:

$$r' = \frac{f'r}{r-f} \quad \text{или} \quad x' = \frac{ff'}{x}$$

В обоих случаях преобразование координаты записывается *дробно-линейной функцией*, т. е. функцией вида  $y = (ax + b)/(cx + d)$ . Обратное, переписав последнее равенство в виде

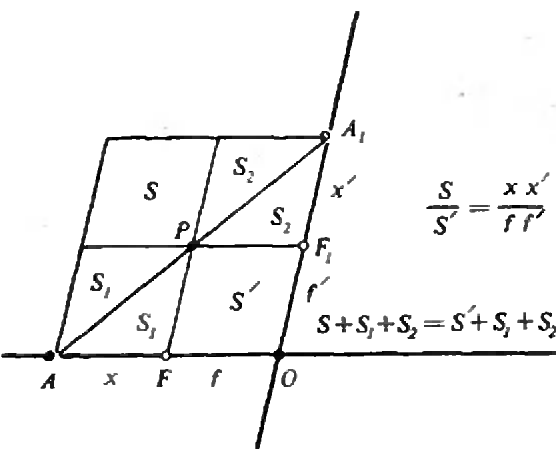


Рис. 11. Вывод формулы линзы в осях  $x$  и  $x'$ .

$$\left(y - \frac{a}{c}\right)\left(x + \frac{d}{c}\right) = \frac{bc - ad}{c^2},$$

аналогичном (2), убеждаемся, что любую дробно-линейную функцию, отличную от линейной ( $c \neq 0$ ) и от постоянной ( $bc - ad \neq 0$ ), можно геометрически представить как центральную проекцию одной координатной оси на другую при соответствующем выборе осей и центра проекции.

Параллельные проекции, как легко понять, выражаются линейными функциями  $y = ax + b$ . А поскольку композиция любого числа линейных и дробно-линейных функций снова будет дробно-линейной функцией\*), всякое проективное преобразование прямой выражается в координатах дробно-линейной функцией.

Отсюда, между прочим, следует, что проективное преобразование прямой полностью определяется образами трех точек. Действительно, по координатам этих точек и их образов составляются три уравнения на коэффициенты  $a, b, c, d$  соответствующей дробно-линейной функции. Тем самым коэффициенты будут заданы с точностью до множителя, а сама функция — однозначно. Точно так же, зная координаты двух точек  $A, B$  и их образов  $A', B'$  при *параллельной* проекции, мы могли бы найти соответствующую линейную функцию, а с ее помощью — и образ  $C'$  любой другой точки  $C$ . Однако точку  $C'$  можно построить гораздо проще: при *параллельной* проекции отношение, в котором точка делит отрезок, остается неизменным, или инвариантным, поэтому  $A'C' : C'B' = AC : CB$ . (Здесь и ниже мы считаем отрезки направленными; равенство  $AC : CB = k$  означает, что  $\vec{AC} = k\vec{CB}$ .) Центральная проекция не сохраняет отношение  $AC : CB$ , зато она сохраняет отношение двух таких отношений. Эта величина называется *двойным отношением* четырех точек, обозначается  $(ABCD)$  и равна по определению

$$(ABCD) = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}.$$

\*) Линейная функция — это частный случай дробно-линейной.

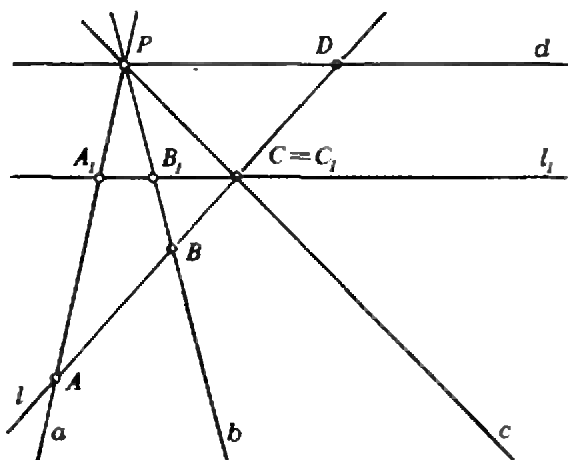


Рис. 12. К инвариантности двойного отношения.

Чтобы доказать инвариантность двойного отношения, рассмотрим прямые  $a, b, c, d$ , проходящие через общую точку  $P$  (рис. 12) и произвольную прямую  $l$ , пересекающую их в точках  $A, B, C, D$ . Проверим, что  $(ABCD) = A_1C_1/B_1C_1$ , где  $A_1, B_1, C_1$  — точки пересечения прямой  $l_1$ , параллельной  $d$ , с  $a, b$  и  $c$ . Очевидно, отношение  $A_1C_1/B_1C_1$  одинаково для всех таких прямых, поэтому можно считать, что  $l_1$  проходит через  $C$ , т. е.  $C_1 = C$ . Из подобия треугольников, которые читатель легко найдет сам на рисунке 12, имеем

$$\frac{AC}{AD} = \frac{A_1C}{PD}, \quad \frac{CB}{DB} = \frac{B_1C}{PD}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{AC}{CB} \cdot \frac{AD}{DB} &= \frac{AC}{AD} \cdot \frac{CB}{DB} = \\ &= \frac{A_1C}{PD} \cdot \frac{B_1C}{PD} = \frac{A_1C}{B_1C} = \frac{A_1C_1}{B_1C_1}. \end{aligned}$$

Итак, для данных прямых  $a, b, c, d$  двойное отношение  $(ABCD)$  не зависит от прямой  $l$ , а значит, оно сохраняется при центральной проекции.

Пусть теперь нам известны образы  $A', B'$  и  $C'$  точек  $A, B, C$  при некотором преобразовании. Тогда образ  $D'$  любой другой точки  $D$  находится из соотношения  $(A'B'C'D') = (ABCD)$  или  $A'D'/D'B' = (ABCD) \cdot (A'C'/C'B')$ . Если записать эти равенства в координатах, мы получим еще одно подтверждение того, что проективное преобразование

выражается дробно-линейной функцией, и одновременно способ нахождения этой функции. В качестве упражнения читателю предлагается в прямом вычислении проверить инвариантность двойного отношения относительно линейных функций и функции  $1/x$ , а значит, и любой дробно-линейной функции (ибо любая дробно-линейная функция — композиция таких функций!).

Вернемся еще раз к линзе, соответствующему проективному преобразованию  $p$  ее главной оптической оси и его аналитическому выражению — формуле линзы. Оказывается, и эту формулу можно вывести с помощью двойного отношения. Представим, что к главной оси добавлена воображаемая бесконечно удаленная точка  $U$ , координату которой будем считать равной  $\infty$ . Условимся, что через эту точку проходят все прямые, параллельные оси. Тогда ее нужно рассматривать как изображение фокуса  $F$ , а ее собственным изображением будет второй фокус  $F'$ . Итак, мы знаем, куда переходят при преобразовании  $p$  три точки: центр линзы —  $p(O) = O$ , фокус —  $p(F) = U$  и бесконечно удаленная точка —  $p(U) = F'$ . Координаты точек  $O, F, F'$  и  $U$  равны, соответственно,  $0, f, f'$  и  $\infty$ . Если  $r$  и  $r'$  — координаты точки  $A$  и ее образа  $A'$ , то

$$\begin{aligned} (OFUA) &= \\ &= \frac{\infty - 0}{f - \infty} : \frac{r - 0}{f - r} = -\frac{f - r}{r} = 1 - \frac{f}{r}, \\ (OUF'A') &= \frac{f' - 0}{\infty - f'} : \frac{r' - 0}{\infty - r'} = \frac{f'}{r'}. \end{aligned}$$

Приравняв эти выражения (двойное отношение сохраняется!), получаем формулу линзы. Обосновать законность этих трюков легко: надо просто перейти в равенстве  $(OB'CA) = (OB'C'A')$  к пределу при  $B \rightarrow F, OC \rightarrow \infty$ . Однако в следующем разделе мы увидим, что добавление бесконечно удаленной точки имеет глубокий смысл, а отнюдь не является чисто формальным приемом, граничащим с мистификацией.

(Окончание см. в № 10)

# ПРОГУЛКИ С ФОТОАППАРАТОМ

Кандидат физико-математических наук  
А. В. МИТРОФАНОВ

*По-моему, нельзя утверждать, что вы видели что-то, пока вы не получили фотографию этого предмета.*

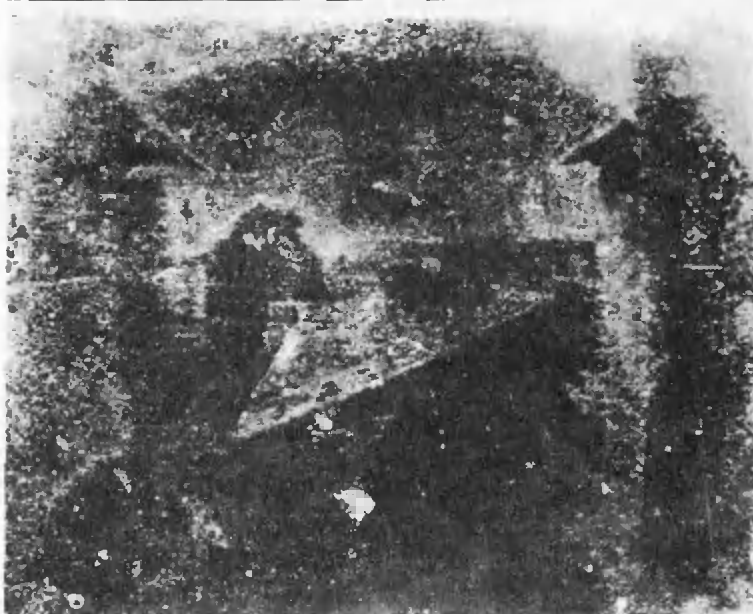
*Эмиль Золя*

7 января 1839 года принято считать датой рождения фотографии. В этот день на заседании Парижской Академии наук ее секретарь Доминик Франсуа Араго доложил об изобретении художника Луи Жака Дагера. «Благодаря стараниям Луи Дагера, — сказал Араго, — человечество вознаграждено за настойчивость: луч света стал послушным рисовальщиком.»

Слова Араго оказались пророческими: сейчас ни у кого нет сомнений в том, что фотография, иначе говоря — светопись, — это одно из величайших достижений нашей цивилизации.

Появление фотографии привело

150 лет фотография



Н. Ньепс

Решающий вклад в изобретение фотографии внесли три человека: французы Жозеф Нисефор Ньепс (1765—1833) и Луи Жак Манде Дагер (1787—1851) и англичанин Уильям Генри Фокс Тальбот (1800—1877).

к созданию совершенно нового вида изобразительного искусства. Прекрасно и точно высказывание, что фотография — это «язык сердца и глаз». Это так же верно, как и то, что фотография — мощное средство познания мира, а фотоаппарат — старый и надежный помощник ученого, в какой бы области естественных наук тот ни работал.

В научных исследованиях фотографирование стало использоваться уже с середины прошлого века.\*) Помогая решать конкретные задачи науки,

\*) Тем, кто интересуется научной фотографией, кто хочет познакомиться с великолепной коллекцией старых и сравнительно новых фотоснимков, полученных учеными, рекомендуем книгу молодого английского астронома и популяризатора науки Дж. Дарнуса «Недоступное глазу», выпущенную издательством «Мир» в 1986 году (перевод с английского). На с. 17 помещено несколько фотографий из этой книги.



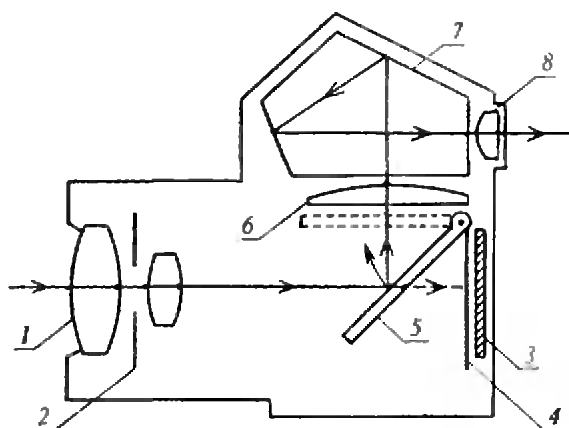


Рис. 1. Одна из простейших схем зеркального фотоаппарата: 1 — объектив, 2 — диафрагма, 3 — фотопленка, 4 — шторка, 5 — отклоняющееся зеркало, 6 — матовый экран, 7 — призмный видоискатель, 8 — окуляр.

фотография в немалой степени способствовала популяризации науки, установлению «моста» между ученым миром и широкой общественностью. Некоторые фотографии, например снимок обратной стороны Луны, сделанный со станции «Луна-3», снимки Юпитера и колец Сатурна, полученные с космических аппаратов «Вояджер», стали сенсацией, облетели многие газеты и журналы.

Для изучающих физику фотокамера — это замечательный прибор, с помощью которого удастся не только фиксировать на фотопленке или фотобумаге те или иные события, но и проводить многие измерения по оптике, механике, астрономии, физике жидкостей и т. д. Фотография позволяет нам шире и глубже взглянуть на окружающий мир, природу, Вселенную. Фотографирование — это отличная возможность тренировки экспериментальных навыков, наблюдательности, умения проводить исследования...

Задача этой статьи — познакомить читателей с некоторыми примерами фотографии как метода экспериментальной физики. Авторский выбор объектов съемки, конечно, субъективен. Умеющие обращаться с фотоаппаратом могут, несомненно, предложить другие примеры, быть может, более интересные и поучительные. В этом роде деятельности есть полный простор для творчества.

Чтобы наблюдать за объектом при съемке, фотографировать удобнее зеркальным фотоаппаратом. Мы не будем заниматься описанием его устройства, тем более что на этот счет написано немало\*), а просто перечислим некоторые достоинства современной фотокамеры. Для работы нам потребуется простейший зеркальный фотоаппарат (например, из сравнительно недорогих фотоаппаратов можно рекомендовать какой-либо аппарат серии «Зенит» с форматом кадра 24×36 мм). Оптическая схема его показана упрощенно на рисунке 1.

Одно из самых замечательных свойств фотоаппарата как прибора экспериментальной физики определяется возможностью фотографировать с различными выдержками — от тысячных долей секунды до нескольких секунд и более. Зрение человека не в состоянии «отслеживать» очень быстрые или, наоборот, очень медленные изменения положения объекта. Фотоаппарат позволяет хронометрировать события, визуально не «улавливаемые».

Расширяя временные рамки наблюдаемых явлений, фотоаппарат помогает нам изменить пространственное восприятие объектов. Для этого нужно только использовать сменную оптику: фотообъективы с разными фокусными расстояниями, насадочные линзы, удлинительные кольца и т. д. Можно выполнять так называемую макросъемку близлежащих предметов или фотосъемку удаленных объектов (скажем, радуги, смерча или лунного диска) с угловым увеличением, воспользовавшись для такой фотосъемки «телевиком», т. е. телеобъективом.

С помощью фотографии можно проводить фотометрирование различных источников света, как точечных, так и протяженных. Наиболее точно удастся сравнивать яркости различных источников света, сфотографированных на одну и ту же пленку, когда исключаются экспериментальные ошибки, связанные с неоднознач-

\*) См. например, книгу А. И. Трачуна «Зеркальный фотоаппарат как система» (М.: Искусство, 1986. — Серия: Массовая фотография-библиотека).

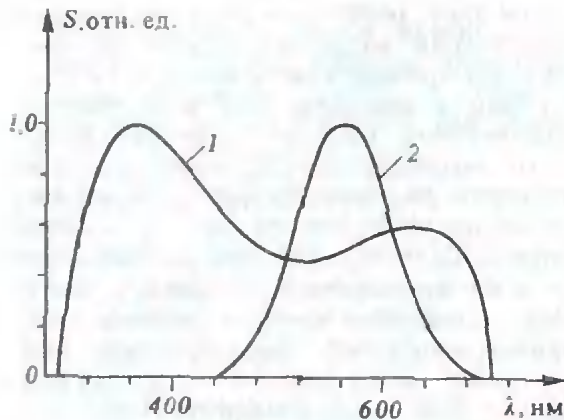


Рис. 2. Спектральная чувствительность в относительных единицах изопанхроматической фотоэмульсии типа «Фото» (кривая 1) и человеческого глаза для дневного зрения (кривая 2).

ностью режимов проявления и с разбросом характеристик разных фотопленок.

Если проявлять пленку в стандартных условиях, то можно найти абсолютную величину светового потока от источника излучения в заданной точке (правда, с определенной погрешностью). Подбирая светочувствитель-

150 лет фотографии

ность пленки, состав проявителя, время экспозиции кадра, размер диафрагмы и дополнительные светофильтры, можно фотографировать и изучать очень широкий класс объектов (скажем, проводить ночную панорамную съемку местности или получать фотографии ослепительно яркого солнца).

Обычная любительская фотопленка — это сравнительно чувствительный приемник света. При экспозициях порядка 0,01—0,1 лк·с и более уже удается фотографировать. Поэтому ночная фотосъемка на высокочувствительную фотопленку при длительных выдержках (скажем, ~100 с) может заменить наблюдения с помощью так называемого прибора ночного видения, т. е. очень сложного устройства — электронного усилителя яркости.

Спектральная чувствительность фотопленки с панхроматической или изопанхроматической эмульсией типа «Фото» гораздо шире, чем у человеческого глаза (см. рис. 2). Пленка



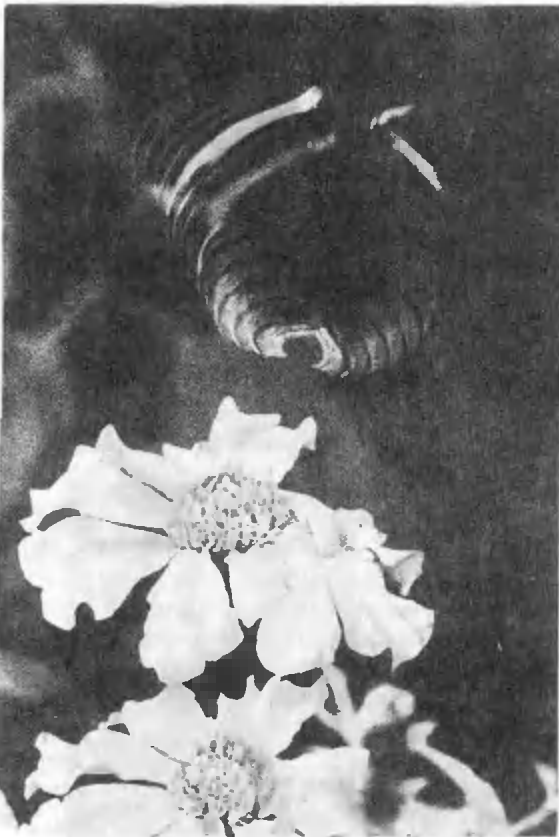
Н. Ньепс получил первый фотографический позитив (примерно в 1826 году). Поместив в камеру-обскуру оловянную пластинку, покрытую битумной «эмульсией», он экспонировал ее в течение дня, а затем обработал в лавандовом масле. На пластинке зафиксировался вид из окна мастерской.

Ж. Дагер десятью годами позже разработал первый практический фотографический

процесс. Суть изобретения Дагера основана на открытом им эффекте проявления в парах ртути предварительно экспонированной в камере-обскуре серебряной пластинки, покрытой йодистым серебром. Ф. Тальбот примерно в это же время изобрел негативно-позитивную фотографию. Он получил изображение в камере-обскуре на бумажной пластинке, пропитанной светочувствительным раствором.



Ж. Дагер



позволяет регистрировать излучение с длинами волн, лежащими за пределами кривой чувствительности глаза как в красной, так и в ультрафиолетовой области спектра. Более того, замена объектива непрозрачным экраном (металлической пластинкой) с маленьким отверстием в центре превращает зеркальный фотоаппарат в полуавтоматическую камеру-обскуру, с помощью которой можно даже фотографировать рентгеновские источники излучения — например, фокус работающей медицинской рентгеновской трубки. Фотопленку при этом лучше прикрыть черной бумагой, непрозрачной для видимого света, или же прикрыть этой бумагой само отверстие камеры-обскуры.

Специальные виды съемки, такие как получение стереоизображений (стереопар), съемка с использованием поляризационного светофильтра, фотографирование на цветную фотопленку и т. д., оказываются полезными при изучении оптических явлений: дифракционного рассеяния, интерференции, поляризации.

Весь этот арсенал технических средств помогает как можно полнее реализовать самое главное достоинство фотокамеры — возможность с ее помощью получить редкий кадр, сфотографировать что-нибудь интересное, что-нибудь новое и необычное, а может быть, и непонятное...

Перейдем теперь к конкретным примерам.

### Загадка адмирала

Рассмотрим такую задачу, которая, на первый взгляд, не имеет отношения к теме нашего разговора.

Известно, что полет многих насекомых сопровождается каким-либо звуком. Вспомните характерный шелест крыльев пролетающей стрекозы, жужжание пчел, не вызывающий приятных эмоций писк комара и т. д. Звуки возникают при машущем полете насекомых, а источником звука являются чаще всего колебания крыльев насекомых в воздухе. Спрашивается: почему многие бабочки (но не все!) летают беззвучно, хотя тоже «хлопают» крыльями?



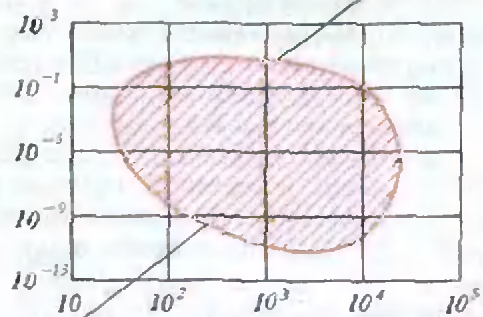
Ответ на этот вопрос можно дать и без фотографии. Однако убедиться в правильности ответа, «подсмотреть», как летают бабочки, нам будет трудно без фотоаппарата.

На фотографиях вы видите бабочку адмирала на цветке и в полете. (Это очень красивая бабочка с широкими красными полосами на передних крыльях; как раз за эти полосы она получила свое название: в старину высшие чины флота носили через плечо красную шелковую ленту. Хотя считается, что эта бабочка встречается почти на всей территории СССР, в Подмоскowie она стала, увы, редкостью.)

Полет адмирала быстрый и стремительный. При съемке выдержка была выбрана равной  $1/30$  с. В течение этого промежутка времени бабочка, взлетевшая с цветка, переместилась вверх на 2—3 мм, что лучше всего заметно по размытым на фотографии траекториям ярких белых точек крыльев и усиков бабочки. При этом крылья адмирала описали почти полную дугу (где-то в пределах  $1/3$ — $1/2$  полного цикла движения крыльев). Отсюда следует, что скорость адмирала была порядка 0,1 м/с, а число взмахов крыльев в секунду около 10—15. Серия фотографий ба-

150 лет фотографии

Интенсивность звука, Вт/м<sup>2</sup> *Болевой порог*



*Порог слышимости*

Частота звука, Гц

Рис. 3. Область слышимости уха человека.

бочки, снятых с разными выдержками, позволила бы нам уточнить эти результаты, но и достигнутая точность вполне достаточна, чтобы ответить на вопрос задачи.

Ответ таков. Крылья адмирала могут вызывать колебания воздуха в основном с частотой лишь 10—15 Гц, равной частоте взмахов крыльев. Звуковые колебания, возникающие при полете адмирала, лежат за порогом восприятия звука нашим ухом, вне области слышимости (см. рис. 3; этот график приводится в некоторых учебниках по акустике и справочниках). Колебания воздуха столь низкой



Ф. Тальбот

Эту пластинку он проявлял и закреплял — получался негатив. С негатива печаталось позитивное изображение на светочувствительной бумаге. Способ Тальбота положил начало основам фотографии, какой мы ее знаем сегодня.

частоты, примерно ниже 20 Гц, называются инфразвуком.

Многие насекомые в полете машут крыльями с гораздо большей частотой, и мы улавливаем звук, даже если они пролетают достаточно далеко от нас. Для сравнения предлагаем вам таблицу, в которой приводится приближенное число взмахов крыльев в секунду некоторых насекомых:

бабочка капустница	— 10—12
бражник	— 85
оса	— 110
шмель	— 240
комнатная муха	— 330
цедоносная пчела	— 250—440
комар	— 600

У пчел, как видно из таблицы, наблюдается большой разброс частот колебаний крыльев. Об этом следует сказать особо. Дело в том, что частота колебаний крыльев пчелы зависит от того, летит ли она со взятком (~300 Гц) или же она ненагружена (~440 Гц). Так что по звуку, а также по фотоснимку, сделанному с короткой выдержкой (~1/1000 с), можно определить, с добычей возвращается пчела домой или нет. Звук летящей пчелы — это не просто тоновые колебания воздуха на несущей частоте, равной частоте колебаний крыльев. Он куда богаче. В отличие от многих других насекомых пчелы могут издавать звуки различной высоты и разных тембров, причем источником этих звуков являются не только крылья, но и части корпуса пчелы, которые вибрируют за счет частых мышечных сокращений. Эти данные были получены на основании скоростной фотосъемки полета пчел.

Именно фотосъемка совместно с акустическими измерениями являются основными экспериментальными методами изучения махового полета насекомых — как это ни странно, одного из наименее к настоящему времени изученных типов полета.

## Как летают птицы?

Фотография стайки воробьев, стартовавшей мартовским утром в Чертанове (один из новых районов Москвы), сделана примерно с расстояния 10 м с помощью объектива «Юпитер-37 А» с фокусным расстоянием 135 мм на фотопленку чувствительностью 250 ед. ГОСТ при выдержке 1/500 с. Вам не кажется, что эти птицы чем-то напоминают рыбок в аквариуме? С той лишь разницей, что их крылья-«плавники» сравнительно больше, чем у рыбок. Такое внешнее сходство не случайно: есть много общего в движении рыб и птиц, хотя птицы значительно тяжелее воздуха, а рыбы в воде почти «невесомы». И еще одна деталь хорошо видна на снимке: воробьи умеют разворачивать плоскость крыльев почти на 90° по отношению к их положению в обычном планирующем полете (см. группу птиц в центре фотоснимка). Это помогает воробьям стартовать свечой вертикально вверх, резко изменять направление полета и замирать неподвижно в воздухе.

Как-то раз я наблюдал такую картину. К нам на балкон в щель между окном и шкафом случайно попал воробей. Щель была узкая, и воробей не мог выбраться из плена. Пришлось ему помочь. Пока я вынимал воробья, он бил крыльями об оконное стекло. На звук с улицы прилетела пара воробьев. Честно говоря, я не ожидал от них таких действий, вызванных явно не простым любопытством.



Похоже было, что воробьи хотели прийти на помощь своему товарищу. Еще более непривычным было видеть, как воробьи держатся в полете. Птицы подлетели почти вплотную к окну и, развернувшись на крутой угол, зависли в воздухе, вибрируя крыльями. Это был так называемый трепещущий полет, которым лучше всех из птиц владеют колибри и который часто встречается у насекомых. И пока я не высвободил пленника и не выпустил его на улицу, эта симпатичная пара энергично махала крыльями, находясь в воздухе почти на одном месте, а потом мгновенно исчезла.

Частота взмахов крыльев у воробья в среднем около 15 Гц, т. е. близка к частоте взмаха крыльев бабочки. Но какая громадная разница в летных способностях бабочки и воробья, в скорости, в умении маневрировать! Порхающий полет бабочки — это в основном сочетание взмахов почти плоских крыльев и планирования с неподвижными крыльями. Движение воробья в воздухе — это активный полет тела улучшенной аэродинамической формы с разнообразным набором средств управления полетом. Если сравнивать воробья с летательными аппаратами, созданными человеком, то нужно вспомнить геликоптер, самолет с изменяющимся профилем крыла, закрылки, щелевидное крыло и т. д. \*) Да мало ли что еще есть у нашего воробья, о чем только могут мечтать авиаконструкторы!

В иллюстрированных детских книжках и мультфильмах показывают летящих птиц с хлопающими, как у бабочки, крыльями. Так ли это происходит на самом деле? Вернемся к нашей фотографии. На ней несколько птиц, и поэтому можно различить разные фазы движения крыла в поле-

те. Вопреки традиционным представлениям о машущем крыле, видно, что взмахи крыльев воробья больше напоминают движение весел. Правда, крыло гораздо подвижнее весла: оно может изгибаться в плечевом и кистевом суставах (чтобы создавать и тягу, и подъемную силу). Есть еще одно отличие полета воробья от движения весельной лодки. На лодке, опуская весла в воду, мы резко отводим их назад. Лодка при этом движется вперед. Самая активная фаза движения крыла воробья при горизонтальном полете — это резкое опускание крыльев, при этом крылья отводятся не назад, а вперед, как руки у пловца при заплыве брассом. На фотографии видно, что в самом нижнем положении крылья у воробьев вынесены вперед.

Уловить глазом без фото- и киносъемки эти движения практически невозможно, хотя частота взмахов крыльев не столь уж велика. Вот почему орнитологи, изучающие полет птиц, никогда не обходятся без фотоаппарата или кинокамеры. А исследования в этой области продолжают-ся, причем в работах используются результаты теории полета самолета и аэродинамика. Ученые, занимающиеся проблемами полета птиц, признают, что не птицы научили нас летать, а, наоборот, создание самолета с пропеллером позволило понять, как летают птицы...

Совсем недавно американские исследователи Фэриш Дженкинс, Кенне Дайэл и Тэд Гослоу сфотографировали полет скворца в аэродинамической трубе. К их удивлению обнаружилось, что важнейшую роль для движения крыла в полете играют грудные кости птицы: а именно, оказалось, что известная любителям курятины кость, называемая вилочкой или дужкой, действует при взмахах крыльев скворца как мощная идеальная пружина. При резком движении крыла вниз она распрямляется и передает свою энергию крылу, выполняя при этом еще роль привода воздушного насоса, обеспечивающего интенсивное дыхание птицы в полете. При движениях крыла вверх и вниз

\*) О том, какими преимуществами по сравнению с искусственными летательными аппаратами обладают птицы, рассказывалось в статье А. А. Борина «Полет птицы и полет человека» в сентябрьском номере «Кванта» за 1988 год. Тем, кого интересует физика полета, мы советуем познакомиться с книгой А. А. Стасенко, которая так и называется — «Физика полета» (М.: Наука, 1988. — Серия: Библиотечка «Квант»).





поперечное сечение грудной клетки скворца в области плечевого пояса изменяется более чем на 50%! Без учета такого механизма раньше трудно было объяснить, как птицы делают мощные взмахи крыльев в полете и не устают.

Дженкинс и его коллеги получили свои научные результаты исключительно благодаря фотографии. Правда, не совсем обычной. Они проводили фотосъемку в рентгеновских лучах, чтобы наблюдать только движение костей птицы в полете.

### Следы планет и звезд на фотоснимках

Рассмотрим теперь случай медленного, «застывшего» для глаз движения.

Ночная фотосъемка — это исключительно интересное занятие для фотолюбителя, требующее большого мастерства, трудолюбия и находчивости. Ведь уже в сумерках света для фотографирования маловато, а что уж говорить о фотосъемке ночью! Тем не менее на разных фотовыстав-

ках иногда бывают хорошие «ночные» фотоработы, снимки, изображающие чаще всего ночную жизнь городов, с освещенными окнами домов, огнями реклам, транспорта и т. д.

Если при съемке ночного пейзажа в поле зрения объектива попадает участок звездного неба, то у фотографа потом появляются дополнительные трудности: при проявлении негатива и изготовлении фотоснимка небесные светила, такие, казалось бы, неподвижные, оставляют на фотоэмульсии длинные светлые треки — это следы движения звезд и планет на небосводе. Конечно, их можно заретушировать, но на показанной здесь фотографии я специально не сделал этого, а оставил все как есть, чтобы предложить вам решить самостоятельно следующую задачу: как определить время экспонирования такого ночного кадра? На фотографии показан освещенный луной судоходный окский залив с сигнальным бакенем перед отмелью. Снимок был сделан, когда сумерки уже прошли и наступила ночь. Оцените выдержку при фотографировании этого кадра.

Читателям, которым мои примеры показались слишком легкими, предлагаю более трудные вопросы:

1. Почему бабочку, попавшую в пустую стеклянную банку или между оконными рамами и машущую крыльями, очень хорошо слышно, хотя свободный полет бабочки беззвучен?

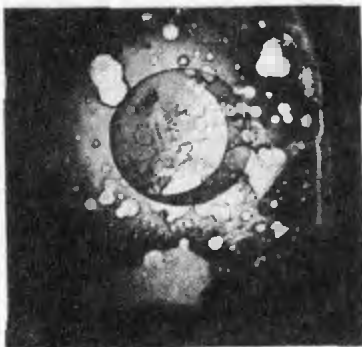
2. Частота взмахов крыльев воробьев приблизительно такая же, как у бабочек. Почему же тогда мы слышим пролетающую недалеко стайку воробьев и совсем не слышим стайку клубок порхающих в воздухе бабочек?

3. При быстром перемещении предмета перед фотокамерой его изображение на фотоснимке получается размытым. Каким образом космонавтам удается получать высококачественные фотографии земной поверхности при фотографировании со спутника, который пролетает над Землей с огромной скоростью — около 8 км/с? Можно ли по фотоснимку, переданному со спутника, определить скорость спутника?

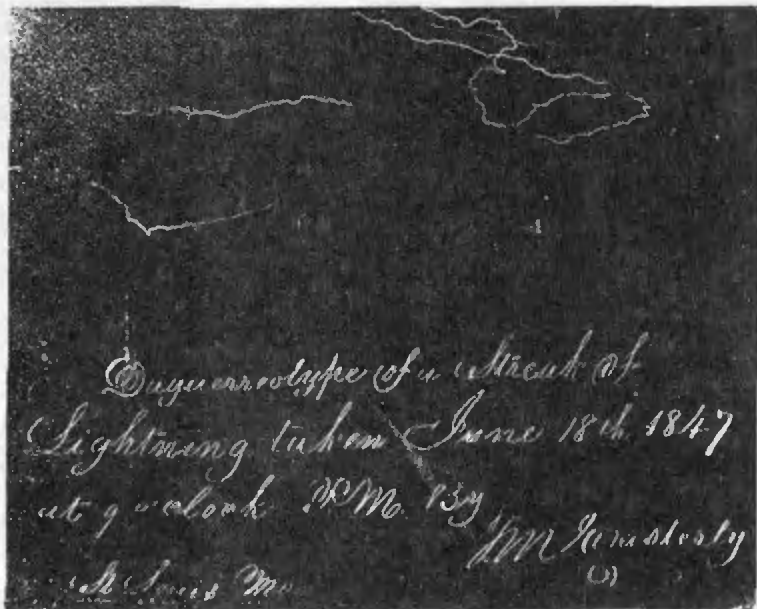
4. Снимок пейзажа при лунном освещении был выполнен с объективом «Юпитер-37» при максимально открытой диафрагме (диафрагменное число 3,5), использовалась фотопленка типа «Фото» чувствительностью 130 ед. ГОСТ. Определив время экспозиции ночного кадра и сравнив его с характерной выдержкой, необходимой для фотосъемки того же пейзажа ясным солнечным днем, оцените, во сколько раз яркость солнечного диска больше, чем лунного. Разумна ли ваша оценка?

## 150 лет фотографии

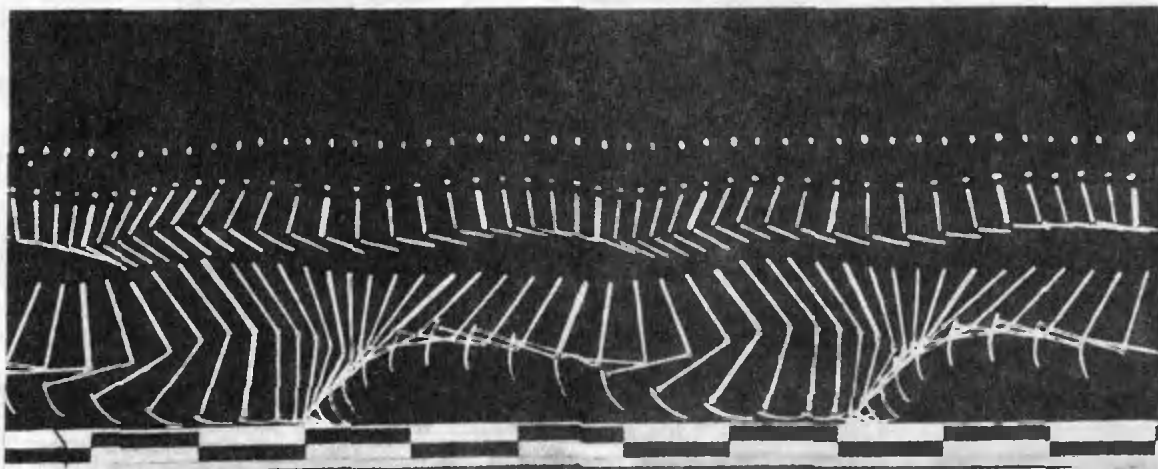
Несколько фотографий из книги Джона Дарнуса «Недоступное глазу», выпущенной издательством «Мир» в 1986 году.



1



2



3

«Благодаря изобретению г-на Дагера физика сегодня получила реалитет, необычайно чувствительный к действию света, и прибор, который сыграет в изучении света и световых явлений такую же роль, как микроскоп в изучении малых объектов. Это изобретение создаст основу для новых исследований и новых открытий». — так в 1839 году сказал о фотографии французский физик и химик Жозеф Луи Гей-Люссак. И действительно, фотография сразу заняла иск-

лючительное место в разных областях научных исследований...

1. Дагеротип лунного серпа. Возможно, что первая астрономическая фотография. (1840 год)

2. Вспышка молнии, снятая ночью 18 июня 1847 года.

3. Одна из первых стробоскопических фотографий. Посмотрев на фото 4, вы догадаетесь, что на ней запечатлено. (Примерно 1881 год)

4



# В МИРЕ МОЩНОГО ЗВУКА

Доктор физико-математических наук  
О. В. РУДЕНКО,  
кандидат физико-математических наук  
В. О. ЧЕРКЕЗИЯ





«Стоп! — приказал капитан, и подлодка тотчас остановилась на месте... — Целься! — Звук!...

В первую минуту во внешнем виде крейсера ничего не изменилось. Ультразвуковая пушка работала лишь на пяти десятых своей мощности. Вдруг... середина подводной части крейсера стала растягиваться, расползаться, словно глина. Спусти лишь одну минуту после начала ультразвуковой атаки середина обращенного к подлодке борта корабля неожиданно и сразу вдавилась внутрь его, потом вдруг, как огромный пузырь, лопнула, и гигантская струя воды ворвалась в трюмы, машинное отделение, артиллерийские погреба.»

Мы привели отрывок из некогда популярного научно-фантастического романа Гр. Адамова «Тайна двух океанов». (Быть может, кто-то из наших читателей лучше помнит двухсерийный приключенческий фильм с таким же названием.) Герои этого произведения совершают кругосветное путешествие на борту экспериментальной подводной лодки «Пионер» — чуда советской военной техники. Как подлодка, так и водолазы в автономных скафандрах вооружены ультразвуковым оружием, которое не раз выручало их в критических ситуациях. Мощным ультразвуком акванавты пытались разрушить скалу, завалившую выход из подводной пещеры; сразили огромного кашалота, который чуть не потопил загарпунивших его китобоев; уничтожили вражеский крейсер и даже... фантастических морских чудищ, похитивших одного из членов экипажа подводной лодки...

Возможно, читателю покажется излишним то внимание, которое автор уделил сражениям и погоней за шпионами, однако вспомним, что роман опубликован незадолго до начала войны. И тогда еще можно было думать, что использование ультразвука как оружия реально, что это вопрос техники, который со временем удастся решить. Однако...

В этой статье мы познакомим читателей с некоторыми задачами фи-

зики мощного звука и, в частности, покажем, почему использование мощных акустических (ультразвуковых) волн в качестве оружия неосуществимо (так что по крайней мере в этой части роман Гр. Адамова является сугубо фантастическим произведением). Что касается «мирного» использования мощных акустических волн, здесь положение иное: неразрушающие методы контроля, параметрические излучатели и антенны, ультразвуковая очистка поверхностей, сверление отверстий, разрушение почечных камней — вот лишь некоторые их применения.

За последние двадцать лет произошел колоссальный скачок в понимании того, как ведут себя волны больших амплитуд вообще и акустические волны в частности. Что мы знаем о мощных акустических волнах сегодня?

В журнале «Квант» уже рассказывалось об интересных явлениях, сопровождающих распространение больших волн на поверхности океана (см. статью Л. А. Островского в № 8 за 1987 год). Напомним: эффекты, которые проявляются только для достаточно сильных волн и зависят от их амплитуды, называют нелинейными эффектами. Уже сформировалась область науки, изучающая эти явления, — это физика нелинейных волновых процессов. Раздел физики, изучающий мощные акустические волны, получил название «нелинейная акустика». Эта наука занимает особое место в физике по широте исследуемых объектов. Изучаемые ею волны возбуждаются в газах, жидкостях, твердых телах, плазме. Они существуют в природных средах — в атмосфере, в океане, в грунтах, в объектах космических масштабов; примерами могут служить гром, подводные взрывы, сейсмические волны от землетрясений и многое, многое другое.

У читателя могут возникнуть вполне естественные вопросы. Первый вопрос: так какой же звук следует считать сильным (мощным), а какой слабым, где количественная граница этого разделения?



И второй вопрос: в чем заключаются нелинейные эффекты, что в них необычного или неожиданного, где они могут найти применение?

Постараемся ответить на эти вопросы по порядку. Но сначала напомним о том, что такое звуковая волна.

Звуковая волна представляет собой распространяющиеся в среде области сжатия и разрежения. В каждой точке среды происходит изменение давления, вызванное изменением степени сжатия. Это изменение давления накладывается на то среднее давление, которое существует в среде в отсутствие звуковой волны, и называют его звуковым давлением.

Звуковая волна несет с собой энергию — потенциальную энергию упругой деформации (если звук распространяется в атмосфере, то это энергия упругой деформации воздуха) и кинетическую энергию движущихся частиц (воздуха). Эта энергия течет в том направлении, в котором распространяется волна. Поток энергии, который проходит за единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную к направлению распространения волны, характеризует интенсивность звуковой волны.

Понятно, что и интенсивность  $I$ , и звуковое давление  $p$  зависят от свойств среды, в которой распространяется звук. Мы не будем выводить эти зависимости, приведем лишь формулу, связывающую  $p$ ,  $I$  и характеристики среды — плотность  $\rho$  и скорость звука в среде  $c$ :

$$I = p_0^2 / 2\rho c$$

( $p_0$  — амплитуда звукового давления).

А теперь перейдем к вопросу о том, что такое «сильный» и «слабый» звук.

Силу звука принято определять уровнем звукового давления — величиной, которая связана с амплитудой звукового давления и измеряется в децибелах (дБ):

$$N = 20 \lg(p/p_n), \text{ дБ.}$$

Здесь  $p$  — это давление, уровень которого нас интересует,  $p_n$  — пороговое давление звука, условно принятое равным  $2 \cdot 10^{-5}$  Па. Давление  $p_n$  примерно соответствует интенсивности  $I_n =$

$= 10^{-12}$  Вт/м<sup>2</sup> очень слабого звука, который еще может воспринять человеческое ухо в воздухе на частоте 1000 Гц.

Звук тем сильнее, чем выше уровень звукового давления.

Субъективные представления о силе звука связаны с понятием «громкость», т. е. привязаны к диапазону частот, воспринимаемых ухом (см. таблицу). А как быть, когда частота звука лежит за пределами этого диапазона, в области ультразвука? Именно в этой ситуации, при опытах с ультразвуком на частотах порядка 1 МГц, легче всего наблюдать в лабораторных условиях нелинейные эффекты.

Таким образом, мы как бы замкнули круг: мощными имеет смысл называть такие акустические волны, для которых нелинейные эффекты становятся заметными.

Обратимся теперь к самим нелинейным эффектам. Известно, что обычная (линейная) волна звука малой амплитуды распространяется в среде, не меняя своей формы. При этом и области сжатия, и области разрежения перемещаются в пространстве с одной и той же скоростью — это и есть скорость звука в среде. Если источник звука генерирует (излучает), например, синусоидальную волну, то профиль ее остается синусоидальным на любом удалении от источника. В мощной же звуковой волне картина иная: области, где среда сжата (звуковое давление положительно), перемещаются со скоростью, большей скорости звука, а области разрежения — со скоростью, меньшей скорости звука в данной среде. В результате профиль волны искажается — передние склоны становятся более крутыми, а задние — более пологими. Похожая картина наблюдается для морских волн вблизи берега: гладкие волны зыби на мелководье изменяют свою форму, и в зоне прибоя, прежде чем разрушиться, приобретают крутой передний фронт. Образование крутого переднего фронта или разрыва представляет собой нелинейный эффект. То расстояние  $l_p$ , которое должна пройти

**Интенсивность звука, звуковое давление и уровень звукового давления в различных случаях**

Уровень звукового давления, дБ	Интенсивность звука, Вт/м <sup>2</sup>	Звуковое давление, Па	Примерные условия, соответствующие данным таблицам
0	10 <sup>-12</sup>	2 · 10 <sup>-5</sup>	Порог слышимости.
10	10 <sup>-11</sup>	6,3 · 10 <sup>-5</sup>	Шорох листьев в лесу; слабый шепот на расстоянии 1 м.
20	10 <sup>-10</sup>	2 · 10 <sup>-4</sup>	Тиканье карманных часов; разговор шепотом.
30	10 <sup>-9</sup>	6,3 · 10 <sup>-4</sup>	Читальный зал библиотеки.
40	10 <sup>-8</sup>	2 · 10 <sup>-3</sup>	Разговор вполголоса; негромкая музыка.
50	10 <sup>-7</sup>	6,3 · 10 <sup>-3</sup>	Слабая работа громкоговорителя.
60	10 <sup>-6</sup>	2 · 10 <sup>-2</sup>	Громкий разговор; улица средней оживленности.
70	10 <sup>-5</sup>	6,3 · 10 <sup>-2</sup>	Шум грузового автомобиля; шум внутри трамвая; игра на рояле (на расстоянии 10 м).
80	10 <sup>-4</sup>	2 · 10 <sup>-1</sup>	Работа металлорежущего станка; громкоговоритель при максимальной громкости; шумная улица.
90	10 <sup>-3</sup>	6,3 · 10 <sup>-1</sup>	В вагоне метрополитена; сирена скорой помощи.
100	10 <sup>-2</sup>	2	В кабине пассажирского самолета.
110	10 <sup>-1</sup>	6,3	Сирена пожарного автомобиля; скорый поезд; пневматический молот.
120	10	20	Поршневой авиадвигатель; сильные раскаты грома.
130	100	63	Реактивный двигатель; болевое ощущение.

волна, чтобы ее форма заметно исказилась, называют длиной образования разрыва. Как и всякий нелинейный эффект, искажение профиля зависит от амплитуды волны  $p_0$  — длина образования разрыва обратно пропорциональна амплитуде, т. е.  $l_p \sim 1/p_0$ . Чем сильнее волна, чем больше ее амплитуда, тем быстрее искажается профиль и тем на меньших расстояниях формируется разрыв.

Однако у этого процесса есть конкурент — обычное затухание волны в среде, обладающей вязким трением. Из-за этого затухания амплитуда волны уменьшается, что «притормаживает» процесс искажения профиля. Если затухание достаточно сильное и происходит на расстояниях  $l_z$ , меньших  $l_p$ , нелинейность может оказаться подавленной и не проявиться вовсе. Естественно,  $l_z$ , так же как и  $l_p$ , зависит от свойств среды, в которой распространяется звук.

Теперь мы можем уточнить определение мощной акустической волны: это такая волна, у которой  $l_p < l_z$ . Отношение  $l_z/l_p$  называют акустическим числом Рейнольдса и обозначают  $Re$ .

Когда  $Re > 10$ , волна сильная; при  $Re \ll 1$  — слабая. Число Рейнольдса равно  $Re = \alpha p_0 / f$ , где  $f$  — частота зву-

ка, а коэффициент  $\alpha$  — некоторая константа, характеризующая нелинейные и вязкостные свойства среды (то, как «откликается» среда на мощный сигнал, насколько она его искажает). Для разных сред значения  $\alpha$  различны; для воды  $\alpha \approx 300 \text{ (Па} \cdot \text{с)}^{-1}$ . При распространении в воде звука с частотой  $f \sim 1 \text{ МГц}$  условие  $Re > 10$  выполняется для волн с амплитудой звукового давления  $p_0 > 3 \cdot 10^4 \text{ Па}$ . Таким образом, сильная звуковая волна в воде — это волна с интенсивностью  $I = p_0^2 / 2\rho c > \frac{(3 \cdot 10^4)^2}{2 \cdot 10^3 \cdot 1,5 \cdot 10^4} \text{ Вт/м}^2 = 300 \text{ Вт/м}^2$ ; соответствующий уровень звукового давления —  $N > 180 \text{ дБ}$ .

Вернемся теперь к очень заманчивой идее передачи высоких плотностей энергии на большие расстояния при помощи акустического луча. Довольно длительное время считалось, что эта идея близка к реализации. Вдохновляющим примером в последние годы явилось лазерное излучение. Как известно, наверное, многим читателям, мощные лазерные импульсы способны разрушать конструкции, пробивать отверстия в препятствиях на значительном удалении от самой лазерной установки. На первый взгляд кажется, что замена света на звук в этих задачах принципиально возможна и

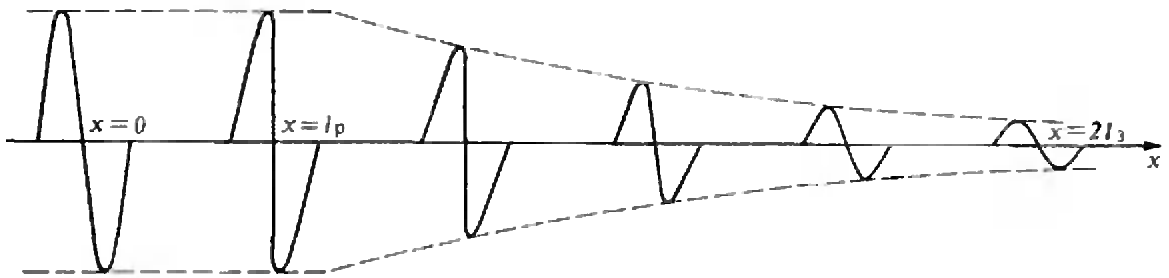


Рис. 1.

остаётся преодолеть лишь технические сложности. Однако существуют трудности принципиального порядка, которые делают бесперспективной идею создания ультразвукового оружия. Оказывается, что для любого заданного расстояния существует предельное значение интенсивности звуковой волны, достигающей цели, причем эта интенсивность тем меньше, чем больше расстояние до цели. И дело вовсе не в обычном затухании акустических волн при прохождении поглощающей среды, которое происходит по закону  $p_x = p_0 e^{-x/l_3}$ .

Обычно длина затухания для акустических волн тем меньше, чем больше частота звука, —  $l_3 \sim f^{-2}$ , т. е. эффект затухания заметно усиливается с увеличением частоты. Однако можно так выбрать частоту, что обычное (линейное) затухание на нужных нам расстояниях будет пренебрежимо мало.\*) Теперь представим себе, что в некотором месте пространства ( $x=0$ ) мы задаем (генерируем) волну именно с такой частотой и с большой амплитудой, такой, что на поведении волны существенно скажутся нелинейные эффекты. Изменение формы одного периода волны при ее распространении показано на рисунке 1.

Мы видим, что до тех пор, пока волна находится на расстояниях  $x \leq l_p$ , она не затухает вовсе. Зато при  $x > l_p$  начинается нелинейное затухание. Амплитуда волны уменьшается по мере удаления от источника как

$$p_0(x > l_p) = \frac{p_0}{1 + x/l_p}$$

\*) Для сигнала частотой 1 МГц в воде  $l_3 \approx 50$  м, а  $l_p$  для ультразвука достаточно большой амплитуды может быть всего 10 см.

— тем быстрее, чем больше исходное значение амплитуды  $p_0$ . При очень больших значениях начальной амплитуды единицей в знаменателе можно пренебречь по сравнению с другим слагаемым; амплитуда убывает пропорционально  $1/x$ , причем, поскольку  $l_p \sim 1/p_0$ , скорость убывания не зависит от величины начального сигнала  $p_0$ . Этот процесс происходит до тех пор (до таких расстояний от источника), пока волна не затухнет столь сильно, что нелинейные эффекты «остановятся», и после этого волна перейдет в линейный режим распространения. Дальнейшее затухание происходит по законам линейной акустики, т. е. является гораздо более слабым и не зависит от величины исходного возмущения.

Можно получить выражение для предельного (максимального) значения амплитуды синусоидальной (на входе в среду) волны при совместном действии как нелинейных эффектов (затухания за счет образования крутого фронта волны), так и обычного линейного затухания, характеризующегося коэффициентом затухания  $1/l_3$ :

$$\lim_{p_0 \rightarrow \infty} p_0(x > l_p) = p_{\text{пред}}(x) = \frac{4f}{\alpha} e^{-x/l_3}$$

Еще раз обращаем внимание читателей на то, что амплитуда сигнала  $p_0(x)$  на расстоянии  $x \gg l_p$ , как это следует из приведенного выражения, не зависит от величины (амплитуды) сигнала  $p_0$  на излучателе. Существует конечный предел  $p_0(x)$  при  $p_0(x=0) \rightarrow \infty$ . Какой бы мощный излучатель мы ни взяли, какой бы большей ни делали амплитуду исходного сигнала, для каждого заданного расстояния  $x$  невозможно получить сигнал больший, чем  $p_{\text{пред}}(x)$ .

Попробуем оценить, какая максимальная интенсивность может быть передана в воде на расстоянии 100 м звуковой волной с частотой 1 МГц:

$$I_{\text{пред}} = \frac{p_{\text{пред}}^2(x=100 \text{ м})}{2c\rho} = \frac{8f^2}{c^2\rho x^2} e^{-2x/l_3},$$

и подставляя  $c \approx 1,5 \cdot 10^3$  м/с,  $\rho \approx 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $\alpha \approx 300$  (Па·с)<sup>-1</sup>,  $l_3 \approx 50$  м, получаем  $I_{\text{пред}} \approx 1$  Вт/м<sup>2</sup>. Таким образом, в условиях, наилучших для возбуждения мощного ультразвукового излучения (в воде), на расстоянии порядка 100 м от источника на приемную антенну площадью один квадратный метр за одну секунду можно передать очень малую энергию, порядка одного джоуля. Этой энергии достаточно, чтобы горела лампочка от карманного фонарика, но явно недостаточно для того, чтобы повредить корабль или травмировать кашалота.

Как же в таком случае возможны многочисленные технологические применения ультразвука, о которых мы упоминали ранее, — сверление отверстий, ультразвуковая очистка и т. д.? Дело в том, что эти операции проводятся на сравнительно небольших расстояниях от излучателя, где нелинейное затухание еще не успело заметно ослабить мощную волну и эффект насыщения еще не наступил.

У читателя может возникнуть вопрос — а как же объяснить сильное воздействие ударных волн на препятствия? Известно, что взрывные ударные волны могут разрушать сооружения, находящиеся довольно далеко от места взрыва. А ведь ударная волна — это сильно нелинейное образование, и поэтому затухание за счет нелинейных эффектов должно

происходить еще быстрее, чем у слабых волн, наблюдаемых в задачах нелинейной акустики.

Все дело в том, что одиночный импульсный сигнал (рис. 2) ведет себя не так, как периодический (сравните рисунки 1 и 2). Его пиковое значение уменьшается по мере удаления от источника по закону

$$p_0(x) = \frac{p_0}{\sqrt{1+x/l_p}}.$$

При больших начальных амплитудах  $p_0$  можно пренебречь единицей под корнем в знаменателе; в этих случаях амплитуда одиночного сигнала в точке наблюдения, скажем у препятствия, зависит от амплитуды в точке излучения (взрыва) и расстояния как

$$p_0(x) = p_0 \sqrt{l_p/x} \sim \sqrt{p_0/x}.$$

Для нас существенна зависимость от исходной амплитуды  $p_0$ . Мы видим, что при сильном проявлении нелинейных эффектов в случае ударной волны максимальное значение  $p_0(x)$  не ограничивается на некотором предельном уровне, а только более медленно зависит от своего начального значения (пропорционально  $\sqrt{p_0}$ , а не  $p_0$  как в линейном случае). Это означает, что, увеличивая амплитуду волны (например, силу взрыва), мы можем добиться на заданном (нусть даже большом) расстоянии больших давлений на препятствие и тем самым разрушить его.

До сих пор мы говорили об изменении формы мощной акустической волны и уменьшении ее амплитуды при распространении в среде. Но мы ничего не сказали о самом главном — о том, как меняется ее спектральный состав. Для приложений этот вопрос очень важен.

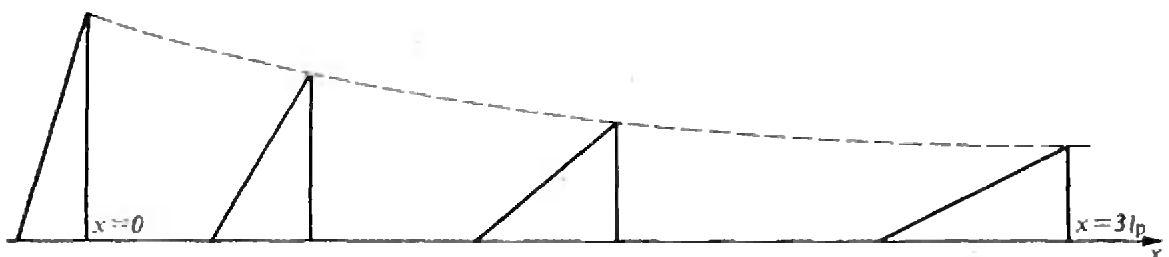


Рис. 2.



Напомним читателю, что такое спектр сигнала. По-видимому, слово «спектр» привычно ассоциируется с картинкой оптических спектров излучения атомов, содержащей набор разноцветных полос. Каждый атом характеризуется своим «спектральным портретом». Так, в спектре натрия выделяется желтая линия на длине световой волны 0,59 мкм. Как бы мы ни преобразовывали в линейной среде световую волну заданного спектрального состава (т. е. с известным набором линий поглощения) — пропускали бы ее через светофильтры, рассеивающие среды, усилители и т. д., — новых частот (или, что то же самое, новых спектральных линий) не возникает. Иное дело — нелинейное преобразование сигнала методами нелинейной оптики. Известно, что инфракрасный луч мощного лазера, пройдя через специально подобранный кристалл, может изменить свой цвет на зеленый. Частота световой волны при этом увеличивается в два раза.

Аналогичный эффект кратного увеличения частоты, или, как еще говорят, генерации высших гармоник, важен и для физики мощных акустических волн. Когда мы рассматривали искажение формы гармонического сигнала (см. рис. 1), мы фактически уже столкнулись с этим явлением. Действительно, спектр сигнала, изображенного на рисунке 1, состоит из набора равноотстоящих частот — основной частоты излучаемого сигнала  $f$  — эта частота соответствует исходному неискаженному синусоидальному сигналу — и высших гармоник  $nf$  ( $n=2, 3, 4, \dots$ ), появившихся при распространении волны в нелинейной среде. Иными словами, искажение формы синусоидальной волны ведет к появлению в спектре высших гармоник. Амплитуда второй гармоники ( $n=2$ ) растет пропорционально пройденному волной расстоянию. Она может стать довольно большой и поэтому может быть измерена достаточно точно. С другой стороны, при фиксированном расстоянии между излучателем и прием-

ником звука амплитуда второй гармоники зависит от упругих свойств среды, или, как говорят физики и материаловеды, от нелинейных модулей среды. Нашим читателям, вероятно, знаком модуль Юнга — величина, определяющая упругую деформацию твердого тела под действием приложенного механического напряжения (вспомним закон Гука). Модуль Юнга — это линейный модуль, так как в законе Гука деформация тела прямо пропорциональна напряжению (линейно зависит от него). При уточнении закона Гука в области больших напряжений, когда деформации нельзя считать упругими — материал становится «пластичным», «течет» и даже разрушается, — зависимость деформации от напряжения характеризуется уже нелинейными модулями среды.

Так вот, измеряя амплитуду второй гармоники прошедшей сквозь такую среду волны, мы тем самым измеряем нелинейные модули среды и, следовательно, можем судить о пластичности, прочности и других важных характеристиках материалов.

Теперь нам удастся понять смысл одного из важнейших приложений нелинейной акустики. При изучении свойств твердых материалов их обычно подвергают большим нагрузкам. С помощью специальных прессов создаются давления до десятков тысяч атмосфер. Вместо этой громоздкой и дорогостоящей аппаратуры иногда можно использовать более простой метод. К торцу стержня из исследуемого материала приклеивают излучатель звука, с помощью которого можно возбудить в стержне достаточно мощную волну. На другом конце стержня регистрируется нелинейный сигнал (например, амплитуда второй гармоники), содержащий нужную информацию о свойствах материала.

В отличие от линейной волны, мощная волна как бы «запоминает» свойства среды на пути своего распространения. Именно поэтому нелинейные сигналы используются для диагностики грунтов и водных сред,

непрозрачных для других видов излучения, но «прозрачных» для звука.

Если на своем пути мощная звуковая волна пересечет трассу другой волны (сигнала), она «запомнит» эту встречу, т. е. ее характеристики изменятся. Иными словами, мощный пучок служит своеобразной приемной антенной. Представьте себе: достаточно увеличить мощность звука, излучаемого, например, в воду, и мы получим приемную гидроакустическую антенну протяженностью в десятки и даже сотни метров. Такой антенной будет столб воды, в котором сосредоточен акустический пучок, т. е. пространство между излучателем и приемником. Разумеется, для слабых волн ничего подобного получить не удается. Известно, что две линейные волны свободно проходят друг через друга, создавая в области пересечения интерференционную картину. Покидая область интерференции, каждая волна ведет себя точно так же, как если бы другой волны не было. Мощный пучок может служить не только приемной, но и излучающей антенной. Приборы, излучающие звук с помощью таких антенн, называют параметрическими излучателями. Для чего нужны эти приборы?

Известно, что единственный вид излучения, который может распространяться под водой на большие расстояния, — это звук. Без акустической связи невозможно освоить Мировой океан, использовать его богатства. Но для направленного излучения низкочастотного звука узким лучом нужны очень большие антенны с диаметром отражающей поверхности (зеркала) в десятки метров. Проблему изготовления огромных излучающих антенн можно обойти, используя нелинейное взаимодействие волн. Для этого антенной обычных размеров надо излучить в воду две мощные звуковые волны с частотами  $f_1$  и  $f_2$ . Эти две волны будут взаимодействовать друг с другом до тех пор, пока не затухнут, например, на расстоянии один километр от излучателя. В результате взаимодействия двух волн рождается сигнал на низкой (раз-

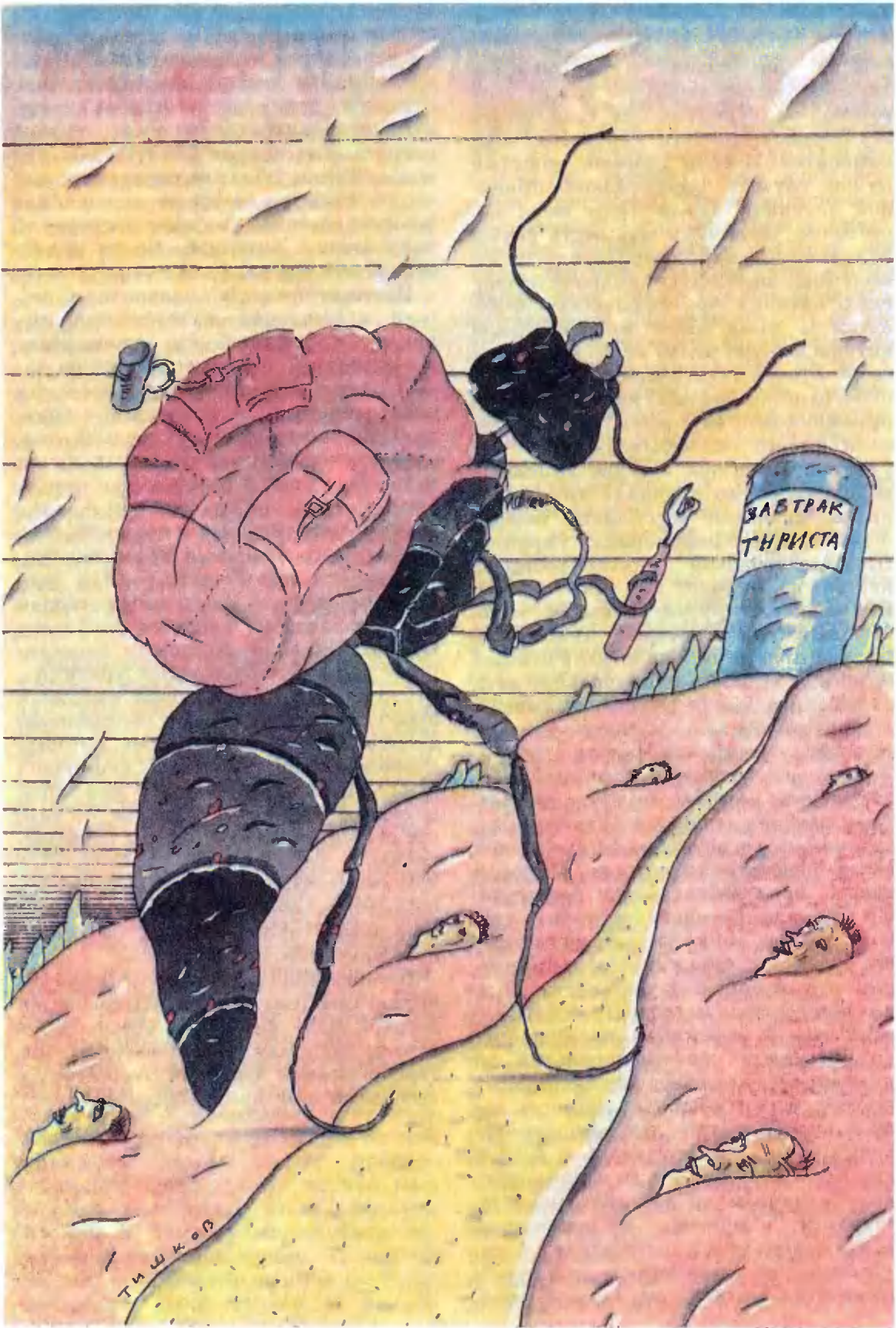
ностной) частоте  $f_1 - f_2$ , который затухает гораздо слабее и может распространяться на очень большие расстояния. Но самое важное — в том, что этот сигнал рождается не на поверхности антенны (там есть только сигналы с частотами  $f_1$  и  $f_2$ ), а в толще воды. Таким образом, километровый столб воды, в котором происходит взаимодействие, является гигантской излучающей антенной. Ее не нужно строить — она возникает сама по себе.

Параметрические излучатели нашли применение в геофизике, медицине, исследовании атмосферы. Но особенно полезными антенны такого типа оказались для морских исследований. Они позволили с большой точностью изучить рельеф дна, свойства грунта в придонных слоях моря. Интересное приложение нашла «параметрика» в археологии; с ее помощью пытались найти ценности, увезенные Наполеоном из Кремля и брошенные им при бегстве в 1812 году в заболоченных, заиленных озерах под Смоленском; найдены предметы, принадлежавшие полярным экспедициям первых лет освоения Арктики...

Сейчас уже организован массовый промышленный выпуск рыбопоисковых акустических локаторов, которые позволяют обнаруживать скопления рыбы у поверхности или у дна моря, в устьях рек, на мелководье — там, где обычные гидролокаторы неэффективны.

В этой статье мы лишь попытались обозначить некоторые из множества эффектов, происходящих в мощных акустических полях.

Нелинейная акустика — молодая наука, она развивается немногим более тридцати лет. Здесь есть чем заняться молодым исследователям, интересующимся физикой нелинейных процессов и ее приложениями.



# МУРАВЕЙ НА КОНСЕРВНОЙ БАНКЕ

И. Ф. АКУЛИЧ

## Правы ли школьники?

Два школьника задумались над решением следующей задачи:

*Консервная банка имеет форму прямого кругового цилиндра радиусом  $R$  и высотой  $H$ . На окружности одного из оснований находится муравей (в точке  $A$  на рис. 1). Он хочет переползти по поверхности банки в наиболее удаленную от него точку  $B$  на окружности другого основания (симметричную точке  $A$  относительно центра банки). Как он должен ползти, чтобы длина пути была наименьшей?*

— Но ведь это — совсем простая задача! — уверенно сказал первый школьник. — Нужно сделать развертку поверхности цилиндра на плоскость. Для определенности будем считать, что муравей ползет сначала по боковой поверхности, а потом по верхнему основанию (возможен, разумеется, и симметричный путь: сначала по нижнему основанию, а потом по боковой поверхности, длина которого такая же). Развернув банку (рис. 2, а), мы сразу же получаем, что кратчайший путь — сначала по образующей  $AM$ , затем — по диаметру  $MB$ . Длина этого пути, очевидно, равна  $S_{\min} = H + 2R$ .

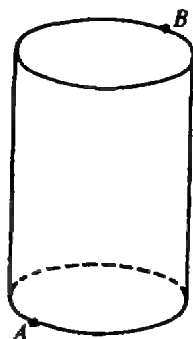


Рис. 1

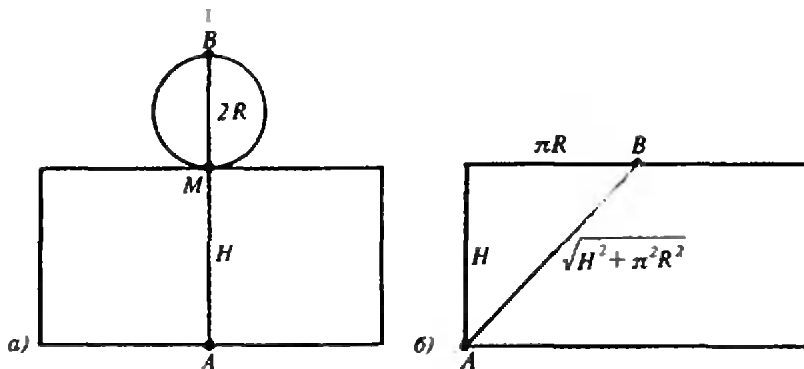


Рис. 2.

— Поймай-ка, — возразил другой школьник, — но ведь гораздо удобнее развернуть банку по-другому. Отбросим донышко вообще, а боковую поверхность развернем в прямоугольник (рис. 2, б). Тогда кратчайший путь — это отрезок, соединяющий точки  $A$  и  $B$ ; длина его равна  $S_{\min} = \sqrt{H^2 + \pi^2 R^2}$ . А на банке путь муравья будет участком винтовой линии.

Школьники заспорили, но потом нашли выход: надо сравнить два полученных результата и какой из них меньше — тот и будет искомым маршрутом. Сначала они определили, при каких условиях оба пути будут равны по длине; для этого они их просто приравнивали:

$$H + 2R = \sqrt{H^2 + \pi^2 R^2},$$

затем преобразовали:

$$(H + 2R)^2 = H^2 + \pi^2 R^2,$$

$$H^2 + 4HR + 4R^2 = H^2 + \pi^2 R^2,$$

$$4H = (\pi^2 - 4)R.$$

$$\frac{H}{R} = \frac{\pi^2}{4} - 1 \approx 1,467.$$

Итак, пути равны при определенном соотношении высоты и радиуса банки. Отсюда легко сделать вывод, что если



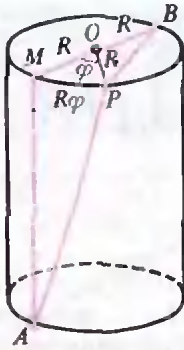


Рис. 3.

$\frac{H}{R} < \frac{\pi^2}{4} - 1$ , то кратчайший путь предложил первый ученик, а если  $\frac{H}{R} > \frac{\pi^2}{4} - 1$ , то кратчайший путь указал второй.

Обрадованные школьники не удержались, чтобы на следующий день не похвастаться перед учителем математики своим решением.

*Вопрос к читателю:* что бы вы сказали им, будучи их учителем?

Нет, не правы!

Давайте ответим вместе: ребята, вы ошибаетесь! Вы, конечно, решили задачу, но... совсем другую. А именно: вы взяли два возможных пути из точки  $A$  в точку  $B$  и определили, при каких условиях какой из путей будет короче. Но ведь кроме этих двух путей возможны еще многие другие пути (рис. 3), идущие от точки  $A$  по боковой поверхности к произвольной точке  $P$  на окружности верхнего основания, а от точки  $P$  к точке  $B$  — по отрезку прямой на верхнем основании. Как видно, маршруты, предложенные школьниками, представляют собой лишь частные случаи предложенного пути: у первого школьника точка  $P$  совпадает с точкой  $M$ , у второго она совпадает с  $B$ , т. е. школьники предложили два «крайних» варианта. Ну а истина, несомненно, где-то посредине.

Давайте разберемся

Итак, поищем кратчайший путь. Если обозначить центр верхнего основания через  $O$ , а угол  $MOP$  через  $\varphi$ , то мы без особого труда определим, что длина дуги  $MP$  равна  $R\varphi$ , длина кратчайшей

линии  $AP$  равна  $\sqrt{H^2 + R^2\varphi^2}$  (по теореме Пифагора); а длина отрезка  $PB$  равна  $2R \cos \frac{\varphi}{2}$ . Таким образом, длина пути является функцией от  $\varphi$  и равна

$$S = \sqrt{H^2 + R^2\varphi^2} + 2R \cos \frac{\varphi}{2}.$$

Осталось только найти минимум этой функции на участке  $\varphi \in [0; \pi]$ .

Как это делать — известно. Минимум может достигаться либо на одном из концов интервала, либо где-то в середине. Что касается концов, то эту часть задачи рассмотрели сами школьники (их маршруты соответствуют значениям  $\varphi=0$  и  $\varphi=\pi$ ). А как найти минимум функции внутри интервала? Здесь универсальный способ дает дифференциальное исчисление. Возьмем производную:

$$S' = \frac{R^2\varphi}{\sqrt{H^2 + R^2\varphi^2}} - R \sin \frac{\varphi}{2}.$$

Те точки интервала  $(0; \pi)$ , в которых эта производная обращается в нуль или не определена (впрочем, последнее в данном случае невозможно), являются точками, *подозрительными на экстремум*: если функция имеет на этом отрезке локальные максимумы или минимумы, то они могут достигаться только в таких точках. Приравняем производную к нулю:

$$\frac{R^2\varphi}{\sqrt{H^2 + R^2\varphi^2}} - R \sin \frac{\varphi}{2} = 0,$$

или, после упрощений:

$$\frac{R\varphi}{\sqrt{H^2 + R^2\varphi^2}} = \sin \frac{\varphi}{2}. \quad (1)$$

Осталось найти отсюда все  $\varphi$ , входящие в интервал  $(0; \pi)$ , определить для этих  $\varphi$  значения  $S$  и среди всех полученных таким образом  $S(\varphi)$ , а также концевых значений  $S(0)$  и  $S(\pi)$ , выбрать наименьшее. И никаких проблем!

Скоро сказка сказывается...

Вот именно. И первая же непреодолимая трудность — решение уравнения (1). Оно *не решается*, т. е. выра-

зять из него  $\varphi$  через  $H$  и  $R$  в виде элементарных функций никоим образом не удается.

Как же быть? Выход один — отыскать какой-нибудь обходной вариант. Прежде всего отметим: если функция имеет в какой-либо точке локальный минимум, то это значит, что слева от этой точки она убывает, а справа возрастает, поэтому производная ее слева — отрицательна, в самой точке равна нулю, а справа — положительна: иначе говоря, производная в некоторой окрестности точки минимума возрастает. Следовательно, вторая производная должна быть в точке минимума положительной (в крайнем случае — нулевой). Если же она строго отрицательна, то можно наверняка утверждать — в этой точке локального минимума нет (а есть, понятное дело, максимум).

Найдем вторую производную:

$$S'' = \frac{R^2 H^2}{(\sqrt{H^2 + R^2 \varphi^2})^3} - \frac{R}{2} \cos \frac{\varphi}{2}. \quad (2)$$

Выясним ее знак при тех  $\varphi$ , для которых первая производная обращается в нуль, т. е. для которых справедливо равенство (1). Но как это сделать? Предлагается «хитрый ход»: выразим из уравнения (1) величины  $\sqrt{H^2 + R^2 \varphi^2}$  и  $H^2$ :

$$\sqrt{H^2 + R^2 \varphi^2} = \frac{R\varphi}{\sin \frac{\varphi}{2}},$$

$$\begin{aligned} H^2 &= \left( \frac{R\varphi}{\sin \frac{\varphi}{2}} \right)^2 - R^2 \varphi^2 = \\ &= R^2 \varphi^2 \left( \frac{1}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}} - 1 \right) = R^2 \varphi^2 \frac{\cos^2 \frac{\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}. \end{aligned}$$

Подставим эти значения в (2):

$$\begin{aligned} S'' &= \frac{R^2 \cdot R^2 \varphi^2 \frac{\cos^2 \frac{\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}}{\left( \frac{R\varphi}{\sin \frac{\varphi}{2}} \right)^3} - \frac{R}{2} \cos \frac{\varphi}{2} = \\ &= \frac{R}{2\varphi} \cos \frac{\varphi}{2} \cdot (2 \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} - \varphi) = \\ &= \frac{R}{2\varphi} \cos \frac{\varphi}{2} (\sin \varphi - \varphi). \end{aligned}$$

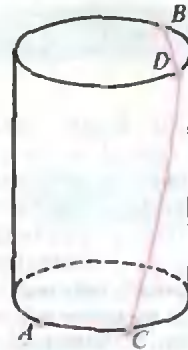


Рис. 4.

Если  $0 < \varphi < \pi$ , то множитель перед скобкой положителен, и, следовательно, знак  $S''$  совпадает со знаком выражения  $(\sin \varphi - \varphi)$ . Но, как известно, если  $0 < \varphi < \pi$ , то  $\sin \varphi < \varphi$ ; откуда следует, что  $\sin \varphi - \varphi < 0$  при  $\varphi \in (0; \pi)$ . Итак, если у функции  $S$  и есть экстремум на этом интервале, то он может быть только максимумом, но никак не минимумом.

А ведь школьники правы!

Следовательно, минимальное значение  $S$  достигается на одном из концов отрезка  $[0; \pi]$ , и, значит, школьники дали совершенно правильный ответ. Т. е. они правы.

Вот тебе и раз! Но ведь и то, что мы им возразили — тоже верно! Парадокс?

Нет, скорее, — счастливый случай. В данной задаче школьникам просто повезло: неверное решение привело к верному ответу. Надо сказать, что такие случаи бывают не так уж и редко: наверно, каждый из своей практики что-нибудь да вспомнит в этом роде. А вообще-то эта статья написана, чтобы напомнить лишний раз: даже при применении самых наочевидных и наиболее надежных методов (как, например, метод развертки при отыскании кратчайшего пути) надо быть осторожным и критически относиться к своим рассуждениям. Иначе можно попасть впросак.

Кстати, наше решение тоже не было полным. Ведь мы не рассмотрели пути муравья, изображенные на рисунке 4. Подумайте сами, как быть с ними! Ответ — как обычно, в конце номера.

# Задачник „Кванта“

## Задачи

M1181 — M1185, Ф1188 — Ф1192

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 ноября 1989 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 9—89» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «M1181» или «Ф1188». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь. Задачи M1181—M1183 и Ф1188—Ф1192 предлагались на заключительном этапе XXIII Всесоюзной олимпиады по математике и физике, задачи M1184 и M1185 — на Московской олимпиаде 1989 года.

**M1181.** На шахматной доске расставлено 8 фигур так, что в каждом горизонтальном и в каждом вертикальном ряду клеток стоит по одной фигуре. Докажите, что на черных клетках шахматной доски стоит четное число фигур.

*В. М. Произволов*

**M1182.** В некоторой роще было  $n \geq 3$  скворечников, причем все расстояния между скворечниками различны. В каждом из них жило по скворцу. В какой-то момент некоторые из них покинули свои скворечники и перелетели в другие, так что снова в каждом скворечнике оказалось по скворцу. При этом, если расстояние между какой-то парой скворцов было меньше расстояния между другой парой (один скворец может засчитываться в разных парах), то после перелета расстояние между первой парой скворцов оказалось больше расстояния между второй парой. При каких  $n$  это возможно?

*А. А. Берзиньш*

**M1183.** Каждый из семи мальчиков в воскресенье 3 раза подходил к киоску мороженого. Известно, что каждые два из них встречались около киоска. Докажите, что в некоторый момент там встречались одновременно трое мальчиков.

*А. В. Анджанс*

**M1184.** На всех шести ребрах произвольного тетраэдра выбрано по точке. Через каждую тройку точек, лежащих на ребрах, выходящих из одной вершины, проведем плоскость. Докажите, что если три из них касаются вписанного в тетраэдр шара, то и четвертая плоскость тоже касается вписанного шара.

*И. Ф. Шарыгин*

**M1185.** Найдите положительные числа  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , удовлетворяющие системе  $n$  уравнений

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_k)(x_k + x_{k+1} + \dots + x_n) = 1 \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

если а)  $n = 3$ ; б)  $n = 4$ ; в)\*  $n = 10$ . г)\* Докажите, что эта система при любом  $n$  имеет единственное решение (в положительных числах).

*В. Ю. Протасов*

**Ф1188.** Между двумя высокими гладкими кольцевыми стенками находится колесная пара (рис. 1) — два тяжелых диска массой  $M$  каждый, насаженных жестко на легкую ось длиной  $L$  ( $L \approx R_2 - R_1$ ). Прилагая к оси горизонтально направленную силу, мы заставляем колесную пару двигаться по кругу без перекосов (так, что ось все время направлена по радиусу). Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы пройти весь круг? Коэффициент трения колес о землю  $k$ ; колеса считать тонкими.

*М. М. Цыпин*

# Задачник „Квант“

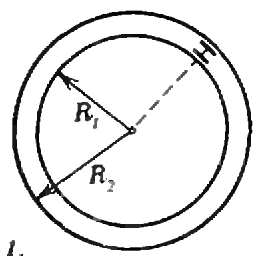


Рис. 1.

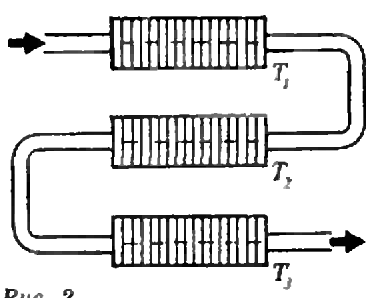


Рис. 2.

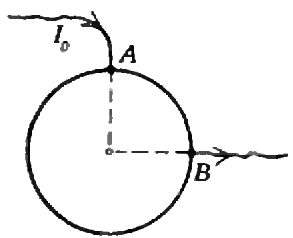


Рис. 3.

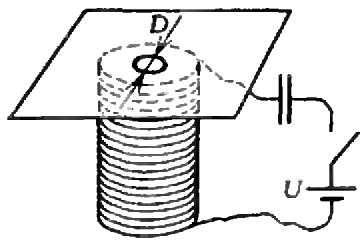


Рис. 4.

**Ф1189.** В большой комнате зимой поддерживается постоянная температура  $T_k = +15^\circ\text{C}$  при помощи трех радиаторов центрального отопления, соединенных последовательно (рис. 2), по которым прокачивается горячая вода. При этом температура первого радиатора  $T_1 = +75^\circ\text{C}$ , а последнего (третьего) —  $T_3 = +30^\circ\text{C}$ . Чему равна температура второго радиатора? Считайте, что теплообмен — как между радиатором и комнатой, так и между горячей водой и радиатором — пропорционален соответствующей разности температур.

А. В. Андрианов

**Ф1190.** К батарее с внутренним сопротивлением  $r = 1$  Ом подключены последовательно два одинаковых конденсатора. Параллельно одному из них присоединяют резистор  $R = 1000$  Ом, при этом в схеме выделяется некоторое количество тепла. Какая часть этого тепла выделится на внутреннем сопротивлении батареи?

А. Р. Зильберман

**Ф1191.** Тонкостенная проводящая сфера радиусом  $R$  подключена к источнику тонкими проводами (рис. 3), присоединенными в точках  $A$  и  $B$  ( $AO \perp OB$ ,  $O$  — центр сферы). Ток через источник равен  $I_0$ . В каком направлении движутся заряды в точке  $C$  ( $OC \perp OA$ ,  $OC \perp OB$ )? Сделаем на сфере около точки  $C$  две отметки, так, чтобы расстояние между ними составляло  $R/1000$ , а соединяющий их отрезок оказался перпендикулярным направлению движения зарядов. Какая часть общего тока протекает по сфере между этими отметками?

Л. Г. Маркович

**Ф1192.** На торце цилиндрического соленоида лежит тонкий лист картона, на нем — маленькое сверхпроводящее кольцо из тонкой проволоки, диаметр которой  $d_1$  существенно меньше диаметра кольца  $D$ . При подключении соленоида к источнику последовательно с конденсатором (рис. 4) кольцо подпрыгивает при  $U > U_0$ . Каким должно быть напряжение источника в аналогичном опыте с кольцом такого же диаметра, но сделанным из проволоки толщиной  $d_2$ ? Индуктивность такого кольца с достаточной для практики точностью можно оценивать по формуле  $L = kD \ln(1,4D/d)$ . Сопротивление соленоида считать малым.

В. В. Можжев

## Решения задач

М1156—М1160, Ф1168—Ф1172

**М1156.** Восемь хоккейных команд соревнуются между собой за выход в финальную четверку. (Каждые две встречаются один раз, за выигрыш дается два очка, за ничью — одно очко, за проигрыш —

Докажем, что выход в финальную четверку гарантирован команде, набравшей 11 очков. Предположим противное: пусть некоторые 5 команд набрали не менее чем по 11 очков. В 10 играх между собой эти 5 команд набрали в сумме 20 очков, а в играх с 3 остальными — не более  $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ , т. е. всего они набрали не более  $50 < 5 \cdot 11$  очков. Это противоречит нашему предположению.



0 очков.) Какое наименьшее число очков гарантирует выход в финальную четверку?

## Загадки „Кванта“

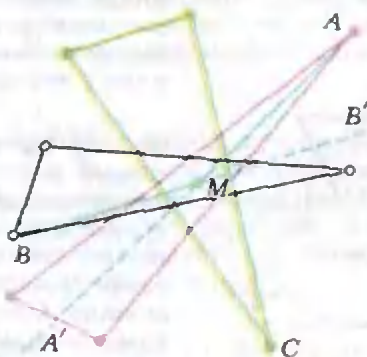
С другой стороны, 10 очков еще не гарантируют выход в финал. Действительно, если какие-то 5 команд все матчи между собой сыграют вничью, а у остальных 3 команд выигрывают, то каждая из них наберет по  $4+6=10$  очков, но может не попасть в финальную четверку.

Точно так же можно доказать, что в однокруговом турнире команд наименьшее число очков, гарантирующее выход в число  $k$  сильнейших из  $n$  участников ( $k < n$ ), равно  $2n - k - 1$ .

С. Ходжиев

**M1157.** Три треугольника — белый, красный и зеленый — имеют общую внутреннюю точку  $M$ . Докажите, что можно выбрать по одной вершине каждого треугольника так, чтобы точка  $M$  находилась внутри или на границе треугольника с вершинами в выбранных точках трех разных цветов.

Рассмотрим всевозможные углы, образуемые отрезками, идущими из  $M$  в некоторые две вершины разного цвета. Пусть наибольший из этих углов  $\alpha = \angle AMB \leq 180^\circ$ , причем  $A$  — красная точка,  $B$  — белая. Тогда внутри углов  $AMB'$  и  $BMA'$ , смежных с  $\alpha$ , нет зеленых точек (см. рисунок). Поэтому в вертикальном по отношению к  $\alpha$  угле  $A'MB'$  должна найтись хотя одна зеленая вершина  $C$  (иначе все 3 зеленые вершины оказались бы внутри угла  $\alpha$ , и зеленый треугольник не содержал бы внутри себя точку  $M$ ). Треугольник  $ABC$  — искомым: он содержит точку  $M$ , поскольку  $M$  лежит



по одну сторону с  $C$  от прямой  $AB$ , а отрезки  $AC$  и  $BC$  пересекают продолжения отрезков  $BM$  и  $AM$ .

Попробуйте придумать аналог утверждения этой задачи в пространстве.

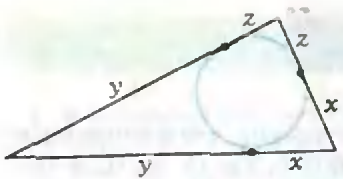
И. Барани

**M1158.** Найдите наименьшее значение выражения  $(x+y)(x+z)$ , если  $x$ ,  $y$ ,  $z$  — положительные числа и  $xyz(x+y+z)=1$ .

Ответ: Наименьшее значение равно 2.

Положим  $a=y+z$ ,  $b=x+z$ ,  $c=x+y$  и рассмотрим треугольник со сторонами  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ; он существует, поскольку каждое из чисел  $a$ ,  $b$ ,  $c$  меньше суммы двух других (см. рисунок). Периметр этого треугольника равен  $2p=a+b+c=2(x+y+z)$ , а площадь, по формуле Герона

# Задачник „Квант“



$$\begin{aligned} x &= p - a \\ y &= p - b \\ z &= p - c \\ x + y + z &= p \end{aligned}$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{(x+y+z)xyz} = 1.$$

С другой стороны,  $2S = bc \sin \alpha$ , где  $\alpha$  — угол между сторонами  $b$  и  $c$ , поэтому

$$(x+z)(x+y) = bc \geq 2S = 2,$$

причем равенство достигается для прямоугольного треугольника, т. е. при условии  $a^2 = b^2 + c^2$ , эквивалентном такому:  $x(x+y+z) = yz$ . (В частности,  $(x+y)(x+z) = 2$  при  $x+y = x+z = \sqrt{2}$ ,  $y+z = 2$ , т. е.  $y = z = 1$ ,  $x = \sqrt{2} - 1$ .)

Догадавшись, когда достигается равенство, легко найти и короткое чисто алгебраическое доказательство, использующее неравенство  $p+q \geq 2\sqrt{pq}$ :

$$(x+y)(x+z) = x(x+y+z) + yz \geq 2\sqrt{xyz(x+y+z)} \geq 2.$$

О. Христенко

**M1159.** С помощью двусторонней линейки постройте угол величиной  $30^\circ$ . Разрешены следующие операции: (1) проведение прямой через две точки, (2) проведение прямой, параллельной данной, на расстоянии, равном ширине линейки.

Пусть ширина линейки равна 1. Построение проведем в несколько этапов.

1. При пересечении двух пар параллельных прямых (с расстоянием 1 между ними, рис. 1) получаем ромб. Проведем его диагонали и получим пару взаимно перпендикулярных прямых.

2. Строим сетку квадратов со стороной 1 (рис. 2).

3. Проводим диагонали квадратов одного направления и одну диагональ — другого. Строим сетку прямоугольников со сторонами 1 и  $\sqrt{2}$ .

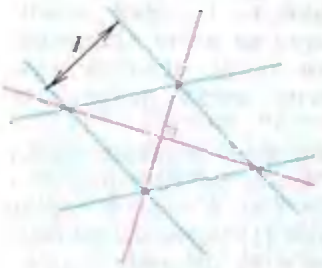


Рис. 1.

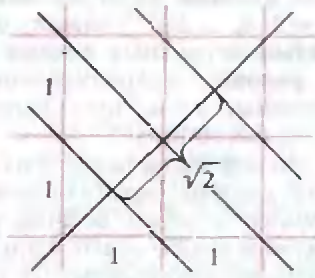


Рис. 2.

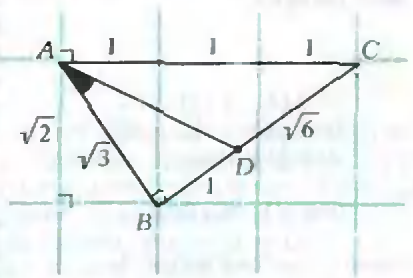


Рис. 3.

4. Отмечаем три узла этой сетки  $A, B, C$ , образующие прямоугольный треугольник с катетами  $AB = \sqrt{3}$ ,  $BC = \sqrt{6}$  и гипотенузой  $AC = 3$  (рис. 3).

5. Проведя прямую, параллельную  $AB$  на расстоянии 1 от нее, находим точку  $D$  на отрезке  $BC$  такую, что  $BD = 1$ . Тогда  $\angle BAD = 30^\circ$ .

Конечно, имеются и другие решения.

Иногда возможности двусторонней линейки понимают более широко: разрешают проводить две параллельные прямые на расстоянии 1 через две заданные точки  $A$  и  $B$  ( $AB \geq 1$ ; рис. 4). Можно показать, что в этом случае с помощью двусторонней линейки ре-

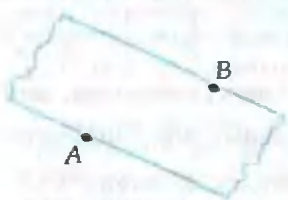


Рис. 4.

# Задачник „Кванта“

шаются все те же задачи на построение, что и с помощью циркуля и линейки (см., например, книгу И. И. Александрова «Сборник геометрических задач на построение», М.: Учпедгиз, 1952). Подумайте, верно ли это для двух операций из условия нашей задачи.

А. В. Полев

**M1160.** У одного конца  $A$  прямолинейной дороги  $AB$  собрались 10 кенгуру и начали играть в чехарду. Они прыгают по очереди: первый каждый раз прыгает, куда хочет; второй прыгает через первого так, чтобы первый оказался точно посередине между началом и концом прыжка, третий точно так же прыгает через второго и т. д., десятый прыгает через девятого, затем начинается новая серия прыжков по тем же правилам.

- а) Могут ли через 10 серий прыжков все кенгуру собраться в точке  $B$ ?  
 б) Могут ли они собраться там раньше?

0	$x_1(1)$	$x_1(2)$	...	1
0	$x_2(1)$	$x_2(2)$	...	1
0	$x_3(1)$	$x_3(2)$	...	1
...	...	...	...	...
0	$x_{10}(1)$	$x_{10}(2)$	...	1

Таблица 1.

0	$1/512$	$10/512$	...	1	
0	$1/256$	$9/256$	...	1 1	
...	...	...	...	...	
0	$1/4$	$3/4$	1	...	1 1
0	$1/2$	1	1	...	1 1
0	1	1	1	...	1 1

Таблица 2.

Ответ: а) да, б) нет.

Будем задавать положение  $i$ -го кенгуру после  $k$ -го прыжка координатой  $x_i(k)$  на осн  $AB$ , приняв точку  $A$  за 0, а  $B$  — за 1. Тогда

$$x_{i-1}(k) = \frac{x_i(k-1) + x_i(k)}{2}, \quad (1)$$

или

$$x_i(k-1) = 2x_{i-1}(k) - x_i(k). \quad (2)$$

Рассмотрим таблицу, в которой на пересечении  $i$ -й строки и  $k$ -го столбца стоит число  $x_i(k)$ ; добавим «нулевой» столбец, задающий начальное положение:  $x_1(0) = x_2(0) = \dots = x_{10}(0) = 0$ . В силу (1) каждое число в таблице, кроме чисел нулевого столбца и последней (10-й) строки, равно полусумме двух, стоящих в следующей строке — в том же столбце и в предыдущем (см. таблицу 1). Если все кенгуру когда-то собрались в точке  $B$ , то последний столбец состоит из единиц и из (2) следует, что весь правый нижний угол состоит из одних единиц, как на таблице 2. Отсюда сразу следует, что число серий прыжков должно быть не меньше 10, причем  $i$ -й кенгуру ( $i = 2, 3, \dots, 10$ ) должен последние  $i-1$  серий дожидаться остальных в точке  $B$ , прыгая на месте. (Конечно, в условии подразумевается, что такие прыжки разрешены, т. е. несколько кенгуру могут находиться в одной точке.)

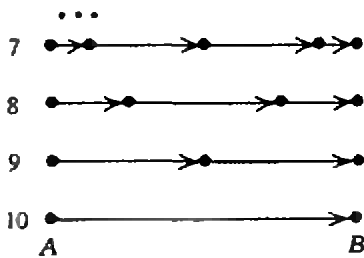
По той же таблице 2 из 10 строк и 11 столбцов видно, как должны прыгать кенгуру, чтобы за 10 серий они попали в точку  $B$ . 10-й кенгуру уже в первой серии должен попасть в  $B$ , и по формуле (1) последовательно находятся (отличные от 1) числа  $x_i(k)$ , начиная с нижних строк: для  $i = 9$ , затем  $i = 8$  и т. д. Чтобы указать прыжки ( $i-1$ -го кенгуру, надо отметить середины векторов, на которые прыгает  $i$ -й кенгуру (см. рисунок).

Составляя таблицу этих прыжков —  $1; \frac{1}{2}$  и  $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}, \frac{2}{4}$  и  $\frac{1}{4}; \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}$  и  $\frac{1}{8}$  и т. д. — легко заметить, что они выражаются через биномиальные коэффициенты

$$C_n^m = \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m}, \text{ участвующие в формуле *)}$$

\*) См. брошюру «Треугольник Паскаля» В. А. Успенского (М.: Наука, 1979) или соответствующие статьи в «Энциклопедическом словаре юного математика» (недавно вышло повторное издание: М.: Педагогика, 1988).

# Задачи „Кванта“



$$(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^n b^n.$$

А именно, длина  $k$ -го прыжка  $i$ -го кенгуру ( $1 \leq k \leq \leq 11 - i, i = 10, 9, \dots, 1$ ) равна

$$x_i(k) - x_i(k-1) = C_{10-i}^{k-1} / 2^{10-i};$$

сумма  $11 - i$  этих прыжков (по всем  $k$  от 1 до  $11 - i$ ) при каждом  $i$  равна 1.

С. Л. Елисеев

**Ф1168.** Оцените максимальную скорость лунохода — работающего на Луне самоходного аппарата, управляемого с Земли.

Предположим, что в какой-то момент телекамера лунохода «обнаружила» неровность лунной поверхности и «сообщила» об этом на Землю. До момента получения команды как двигаться дальше пройдет время

$$t = 2 \frac{l}{c} + \tau = 2 \frac{380 \cdot 10^3 \text{ км}}{300 \cdot 10^3 \text{ км/с}} + 0,1 \text{ с} \sim 2,6 \text{ с}.$$

Здесь  $l$  — расстояние от Земли до Луны,  $c$  — скорость распространения радиосигнала,  $\tau$  — длительность принятия решения оператором.

Для оценки скорости движения лунохода будем считать, что она во столько раз меньше скорости  $v \sim 20 \text{ км/ч}$  движения автомобиля на плохой земной дороге, во сколько раз время  $t$  «принятия решения» луноходом больше времени  $\tau$  реакции земного водителя. Следовательно, максимальная скорость лунохода

$$v_{\text{л}} \sim v \frac{\tau}{t} \sim 1 \text{ км/ч}.$$

В. И. Шелест

**Ф1169.** Тонарм проигрывателя представляет собой легкий прямой стержень длиной  $L$  (см. рисунок), на одном конце которого (в точке  $B$ ) закреплен звукосниматель с иглой, а другой конец закреплен в шарнире, который может без трения вращаться относительно вертикальной оси  $A$ , проходящей на расстоянии  $R$  ( $R > L$ ) от оси вращения  $O$  диска проигрывателя. Игла ставится на ровную однородную поверхность равномерно вращающегося диска. Найти установившийся угол  $\alpha$  между тонармом и линией  $AO$ .

Понятно, что на тонарм со стороны вращающегося диска действует сила трения, направленная, как обычно, против относительной скорости тонарма и диска, в установившемся положении — перпендикулярно отрезку, соединяющему точки  $B$  и  $O$ .

В состоянии равновесия момент силы трения относительно оси  $A$  должен быть равен нулю. Это означает, что сила трения направлена вдоль тонарма, т. е. угол  $ABO$  — прямой, треугольник  $ABO$  — прямоугольный, а угол  $\alpha$  такой, что

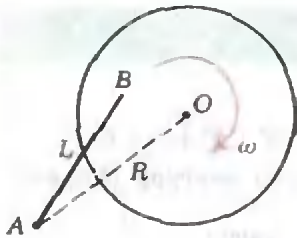
$$\cos \alpha = \frac{L}{R}.$$

Характерно, что это равновесие устойчивое (покажите это самостоятельно).

Пусть теперь игла ставится на грампластинку. Обычно при конструировании проигрывателей выбирают  $L \approx R$ . Тогда при проигрывании пластинки на иглу все время действует сила, стремящаяся сместить ее к центру диска, что ведет к неравномерному износу пластинки. Поэтому в проигрывателях высокого класса преду-



## Задачник „Квант“



считают специальное устройство, компенсирующее это вредное воздействие («антискейтинг», или компенсатор скатывающей силы).

С. Ф. Ким, А. И. Латынин

**Ф1170.** Оценки массы Галактики, полученные различными способами, дают отличающиеся результаты. Так, согласно визуальным оценкам, в пределах расстояния  $R = 3 \cdot 10^4 R_0$  ( $R_0$  — радиус орбиты Земли) от центра Галактики сосредоточена масса  $M_1 = 1,5 \cdot 10^{11} M_0$  ( $M_0$  — масса Солнца). Между тем период обращения звезд, находящихся на указанном расстоянии от центра Галактики, составляет  $T = 3,75 \cdot 10^8$  лет. Определить «скрытую массу» Галактики, т. е. массу невидимых объектов внутри сферы радиусом  $R$ . При расчете движения звезд массу Галактики можно считать сосредоточенной в ее центре.

Для тела, движущегося по окружности радиусом  $r$  со скоростью  $v$  под действием притяжения центрального тела массой  $m_{\text{ц}}$ , центростремительное ускорение  $v^2/r$  равно гравитационному ускорению  $Gm_{\text{ц}}/r^2$  ( $G$  — гравитационная постоянная):

$$\frac{v^2}{r} = \frac{Gm_{\text{ц}}}{r^2}.$$

Отсюда, используя для периода обращения выражение  $t = 2\pi r/v$ , для массы центрального тела получим

$$m_{\text{ц}} = \frac{4\pi^2 r^3}{Gt^2}.$$

Сравнивая движение Земли вокруг Солнца (с периодом  $T_0 = 1$  год) с движением рассматриваемых в задаче звезд, найдем полную массу  $M$  Галактики внутри сферы, радиус которой равен  $R$ :

$$M_0 = \frac{4\pi^2 R_0^3}{GT_0^2}, \quad M = \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2},$$

$$M = M_0 \frac{R^3}{R_0^3} \frac{T_0^2}{T^2} = 1,9 \cdot 10^{11} M_0.$$

Таким образом, «скрытая масса» Галактики равна

$$\Delta M = M - M_1 = 4 \cdot 10^{10} M_0.$$

В. Е. Белонучкин

**Ф1171.** Электрический диполь — две частицы с одинаковыми массами  $m$  и зарядами  $+q$  и  $-q$ , закрепленные на концах жесткого невесомого стержня длиной  $l$ , — вращается с угловой скоростью  $\omega$  в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через центр  $O$  диполя (рис. 1). В некоторый момент включают постоянное магнитное поле с индукцией  $B$ , направленной вертикально. Опишите установившееся движение диполя.

При включении магнитного поля на каждую частицу будет действовать сила Лоренца (рис. 2), направленная вдоль стержня и равная

$$F_{\text{Л}} = qvB = q\omega \frac{l}{2} B.$$

На диполь в целом действует сила

$$F = 2F_{\text{Л}} = q\omega l B.$$

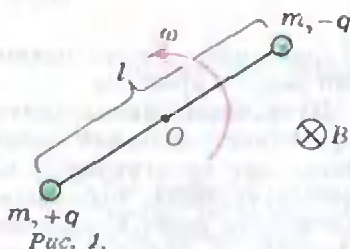


Рис. 1.

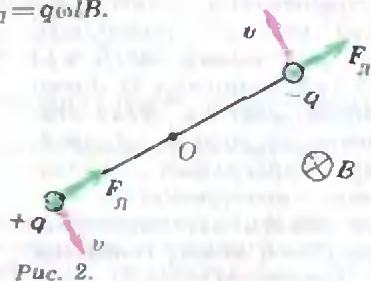


Рис. 2.

## Задачник „Кванта“

Эта сила постоянна по модулю, но ее направление в пространстве изменяется: вектор  $\vec{F}$  вращается вместе со стержнем с угловой скоростью  $\omega$ . Следовательно, центр диполя — точка  $O$  — будет вращаться с угловой скоростью  $\omega$  по окружности радиусом  $r$ , который можно определить из второго закона Ньютона:

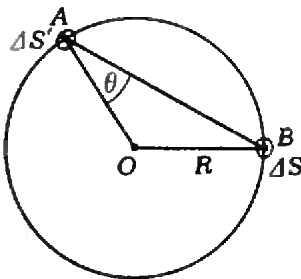
$$F = 2m\omega^2 r \Rightarrow r = \frac{F}{2m\omega^2} = \frac{qIB}{2m\omega}$$

С. Здравкович (СФРЮ)

**Ф1172.** Внутренняя поверхность сферы покрыта диффузным отражателем с коэффициентом отражения  $r=0,9$ . Угловое распределение света, отраженного диффузным отражателем, описывается законом Ламберта:

$$\Delta N = \frac{N}{\pi} \cdot \cos \theta \cdot \Delta \Omega,$$

где  $N$  — полное число отраженных фотонов,  $\Delta N$  — число отраженных фотонов в малом телесном угле  $\Delta \Omega$ , составляющем угол  $\theta$  с нормалью к отражающей площадке. В центре сферы происходит вспышка точечного источника света. Какая доля фотонов выйдет через очень маленькое отверстие, имеющееся в сфере?



Через отверстие в сфере выйдут, во-первых, те фотоны, которые попадут на отверстие непосредственно сразу после вспышки источника, а во-вторых, те, которые попадут на отверстие в результате многократных отражений от внутренней поверхности сферы.

Рассчитаем, какая доля  $p$  фотонов, отразившихся от площадки  $\Delta S'$ , попадет на площадку  $\Delta S$  (см. рисунок). В соответствии с законом Ламберта,

$$p = \frac{\Delta N}{N} = \frac{1}{\pi} \cos \theta \cdot \Delta \Omega, \text{ где } \Delta \Omega = \Delta S \frac{\cos \theta}{AB^2}$$

( $\cos \theta$  учитывает «видимую» из точки  $A$  площадь  $\Delta S$ ). Поскольку  $AB = 2R \cos \theta$ ,

$$p = \frac{\Delta S}{4\pi R^2}.$$

Таким образом, доля фотонов, попавших на площадку  $\Delta S$  с площадки  $\Delta S'$ , зависит только от отношения  $\Delta S$  к площади сферы и не зависит от взаимного расположения выбранных площадок. Это в свою очередь означает, что если площадь отверстия  $s$ , а площадь сферы  $S$ , то после отражения от сферы через отверстие выйдет доля отраженных фотонов, равная  $s/S$ . Для оценки положим  $s/S = 0,1\%$ .

Поскольку уменьшение числа фотонов за счет поглощения стенками сферы на два порядка больше, чем за счет утечки через отверстие (при каждом отражении теряется 10% фотонов, а через отверстие после каждого отражения выходит 0,1%), уменьшением числа  $N_0$  фотонов в сфере за счет утечки через отверстие можно пренебречь. Тогда сразу после вспышки (до первого отражения) через отверстие выйдет  $N_0 s/S$  фотонов, после первого отражения —  $rN_0 s/S$  фотонов, после второго —  $r^2 N_0 s/S$  и т. д. Доля фотонов, которые в конце концов выйдут через отверстие, равна

$$\alpha = \frac{s}{S} (1 + r + r^2 + \dots + r^n) = \frac{s}{S} \frac{1}{1-r} = 1\%.$$

С. А. Хорозов

# О свойствах центра невписанной окружности

В этой заметке мы приведем решение задачи М1146. Сама по себе эта задача не сложна. Но при ближайшем рассмотрении за ней выстраивается длинная цепочка обобщений.

**М1146.** Точка  $K$  — середина стороны  $AB$  равностороннего треугольника  $ABC$ . На сторонах  $AC$  и  $BC$  взяты точки  $M$  и  $N$  так, что  $\angle MKN = 60^\circ$ . Докажите, что периметр треугольника  $MCN$  равен половине периметра треугольника  $ABC$ .

Возьмем сразу общий случай. Пусть  $K$  — точка на биссектрисе угла  $MCN$  величины  $\gamma$ , причем точки  $K$  и  $C$  лежат по разные стороны от  $MN$  (рис. 1). Тогда следующие условия эквивалентны:

- (1)  $\angle MKN = (\pi - \gamma)/2$ ,
- (2)  $MN = PM + QM$ , где  $P$  и  $Q$  — проекции точки  $K$  на стороны угла.

Задача М1146 получается отсюда при  $\gamma = 60^\circ$  (рис. 2): в этом случае угол  $MKN$  в равенстве (1) равен  $60^\circ$ , а свойство (2) эквивалентно равенствам  $CM + MN + NC = CP + CQ = 2CK \cos 30^\circ = 3AB/2$ , т. е. утверждению задачи. Заметим, кстати, что при  $\gamma = 90^\circ$  возникает задача М851 (см. «Квант» № 3 за 1984 г.).

Одно из доказательств эквивалентности (1) и (2) можно получить, повернув  $\triangle KPM$  на угол  $\pi - \gamma$  вокруг точки  $K$  (рис. 3). В результате он перейдет в  $\triangle KQL$  ( $\angle PKQ = \pi - \gamma$ ), где  $L$  — некоторая точка на прямой  $CN$ , причем  $\angle MKL = \angle MKQ + \angle QKL =$

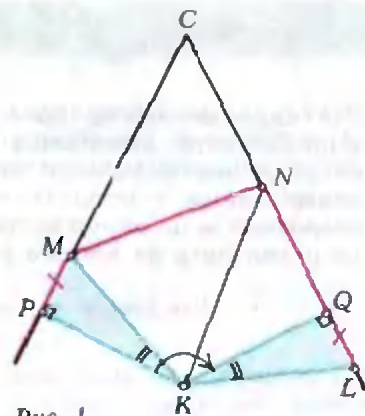


Рис. 1.

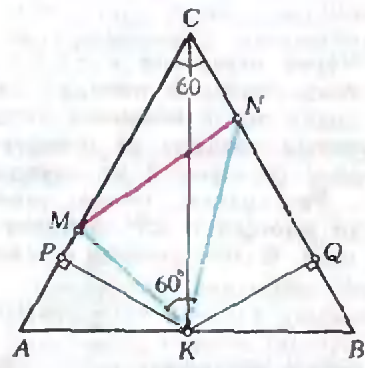


Рис. 2.

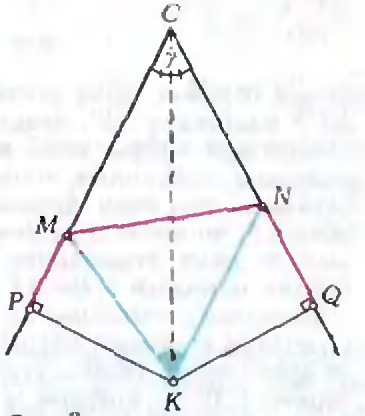


Рис. 3.

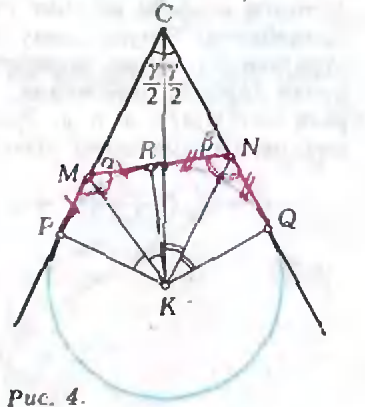


Рис. 4.

$= \angle MKQ + \angle PKM = \pi - \gamma$ .  
 $NL = NQ + QL = NQ + MP$ .  
 Следовательно, каждое из условий (1) и (2) эквивалентно равенству треугольников  $MKN$  и  $LKN$ . Действительно, эти треугольники заведомо имеют общую сторону  $KN$  и равные стороны  $KM$  и  $KL$ , а кроме того, в силу (1) — равные углы ( $\angle MKN = (\pi - \gamma)/2$  и  $\angle LKN = \angle LKM = \angle LKM - \angle NKM = \pi - \gamma - (\pi - \gamma)/2$ , а в силу (2) — равные стороны  $MN$  и  $NL = NQ + MP$ .

Второе доказательство эквивалентности (1) и (2) выявляет геометрический смысл точки  $K$ . Оказывается, условия (1) и (2) означают, что

- (3)  $K$  — центр невписанной окружности треугольника  $CMN$ , т. е. окружности, касающейся стороны  $MN$  и продолжений сторон  $CM$  и  $CN$ .

В самом деле, если  $K$  — центр этой окружности, то  $P$  и  $Q$  — точки ее касания с прямыми  $CM$  и  $CN$ . Пусть  $R$  — точка касания окружности с  $MN$  (рис. 4), тогда, очевидно,  $MP = MR$ ,  $NQ = NR$ , и, следовательно, выполнено свойство (2). А из равенства треугольников  $KPM$  и  $KRM$ ,  $KQM$  и  $KRN$  следует, что  $\angle MKN = \angle PKQ/2 = (\pi - \gamma)/2$ , т. е. выполнено условие (1).  
 Обратно, пусть точка  $K$  удовлетворяет, например, условию (1). Впишем в угол  $MCN$  окружность с центром  $K$  и проведем к ней касательную  $M'N'$ , параллельную  $MN$ . По доказанному  $\angle M'KN' = (\pi - \gamma)/2 = \angle MKN$ , но это возможно, только если  $M' = M$ ,  $N' = N$ . Таким образом, из (1) следует (3). Аналогично доказывается, что из (2) следует (3).



Итак, для всех касательных  $MN$  к вписанной с углом  $C$  окружности с центром  $K$ , проведенных со стороны вершины угла, величина угла  $MKN$ , а также периметр треугольника  $CMN$  постоянны (и равны, соответственно,  $(\pi - \gamma)/2$  и  $CP + CQ = 2CK \cos(\gamma/2)$ ). Еще одна постоянная для всех этих отрезков величина — это произведение отношений, в которых точки  $M$  и  $N$  делят отрезки  $CP$  и  $CQ$ :

$$(4) \frac{CM \cdot CN}{MP \cdot NQ} = \frac{1}{\sin^2(\gamma/2)}.$$

Для доказательства заметим, что  $MK$  и  $NK$  — биссектрисы внешних углов  $PMN$  и  $QNM$  треугольника  $CMN$  (см. рис. 4). Положим  $\angle CMN = \alpha$ ,  $\angle CNM = \beta$ , тогда из треугольников  $PKM$  и  $CKM$  получим

$$\begin{aligned} \angle PKM &= \alpha/2, \\ \angle CKM &= \beta/2. \end{aligned}$$

По теореме синусов

$$\begin{aligned} \frac{CM}{MP} &= \frac{\sin(\beta/2)}{\sin(\alpha/2) \sin(\gamma/2)}, \\ \frac{CN}{NP} &= \frac{\sin(\alpha/2)}{\sin(\beta/2) \sin(\gamma/2)}. \end{aligned}$$

Из этих равенств сразу следует (4).

Еще одно красивое свойство нашей конфигурации обнаруживается, если провести отрезок  $PQ$  и рассмотреть треугольник  $RUV$ , где  $U$  и  $V$  — точки пересечения  $PQ$  с  $KM$  и  $KN$  (рис. 5):

(5)  $U$  и  $V$  — основания высот треугольника  $KMN$ , причем треугольник  $RUV$  подобен треугольнику  $CNM$  с коэффициентом  $1/\sin(\gamma/2)$ .

Наметим доказательство с помощью преобразования подобия. Сначала проведем биссектрисы всех (внутренних и внешних) углов треугольника  $CMN$  и отметим кроме  $K$  еще две точки их пересечения — центры  $K_1$  и  $K_2$

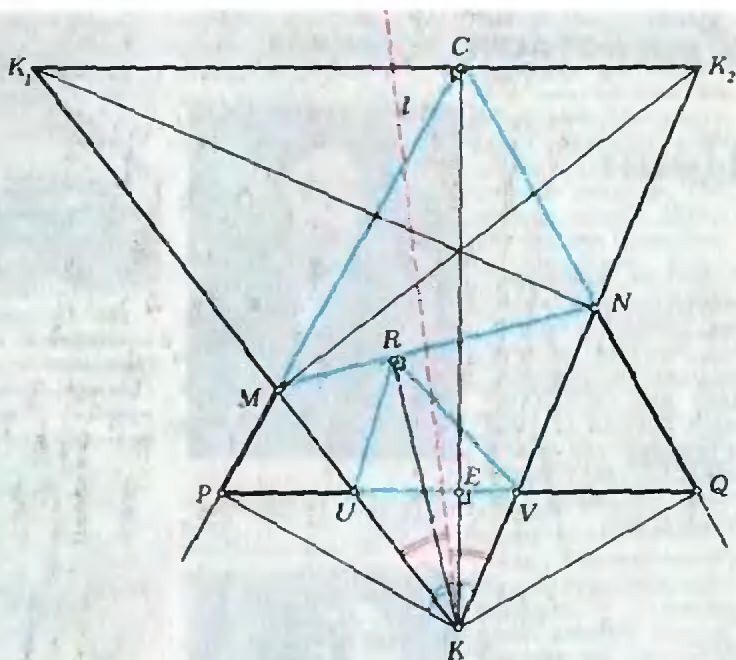


Рис. 5.

двух вневписанных окружностей треугольника  $CMN$  (см. рис. 5). Поскольку биссектрисы смежных углов перпендикулярны, точки  $C, M, N$  — это основания высот треугольника  $KK_1K_2$ . Поэтому нам достаточно указать преобразование подобия с коэффициентом  $k = \sin(\gamma/2)$ , переводящее  $\triangle KK_1K_2$  в  $\triangle KNM$  и одновременно  $\triangle MNC$  в  $\triangle VUR$ . Таким преобразованием является композиция  $F$  симметрии относительно биссектрисы  $l$  угла  $MKN$  и гомотетии с центром  $K$  и коэффициентом  $k$ .

Действительно, при этом преобразовании

1°) точка  $K$  остается на месте, а прямые  $KK_1$  и  $KK_2$  переходят друг в друга, причем  $F(K_1) = N$ ,  $F(K_2) = M$  (ведь  $KN/KK_1 = KM/KK_2 = \cos \angle MKN = \sin(\gamma/2) = k$ );

2°)  $F(C) = R$  (так как  $F(\triangle KK_1K_2) = \triangle KNM$ , а  $KC$  и  $KR$  — высоты этих треугольников);

3°) прямая  $KP$  переходит в прямую  $KC$  (они симметричны относи-

тельно  $l$ ), причем  $F(R) = E$ , где  $E$  — точка пересечения  $KC$  и  $PQ$  ( $KE/KR = KE/KP = \cos \angle PKC = k$ ), и, следовательно.

4°) прямая  $MN$  переходит в прямую  $PQ$ , а значит,  $F(M) = V$ ,  $F(N) = U$ .

Попробуйте самостоятельно найти «традиционное» доказательство утверждения (5) (со вспомогательными окружностями, подсчетом углов и т. п.), а также решить следующие задачи.

1. Докажите, что условия (4) и (5) эквивалентны (1), (2) и (3).

2. Покажите, что если в нашей конфигурации брать точку  $K$  с самого начала по одну сторону с точкой  $C$  от прямой  $MN$ , то условия (2), (4), (5) будут по-прежнему эквивалентны друг другу, а также условиям

$$(1') \angle MKN = (\pi + \gamma)/2$$

и

$$(3') K \text{ — центр вписанной окружности треугольника } CMN.$$

Э. Г. Готман,  
В. Н. Дубровский



# Калейдоскоп „Кванта“

## Цепи

С цепями мы встречаемся повсюду: якорная цепь, велосипедная, цепочка на шее девушки и... собаки. Хотя эти цепи и не очень похожи друг на друга, принцип один: каждое следующее звено цепляется за предыдущее.

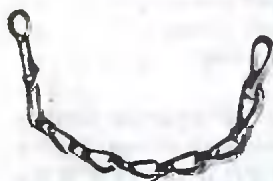


Однако Г. Лейбниц,



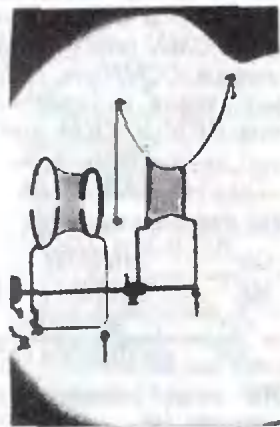
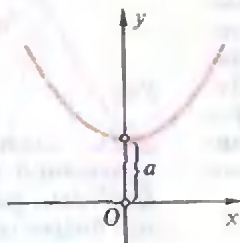
называется «гиперболическим косинусом» («гиперболическим синусом» называется функция  $y = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ ).

Вспомним про цепные мосты, настилы которых подвешены на цепях, например Крымский мост в Москве. Вы думаете, и здесь цепи расположены по цепной линии? Оказывается, что — нет, на этот раз это — парабола.



Я. Бернулли, а

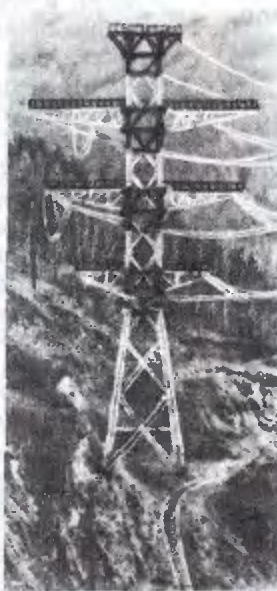
Если поднять цепочку за концы, не натягивая, то она вытянется по некоторой кривой, называемой «цепной линией». Еще Галилей интересовался этой кривой. Из его вычислений (1638 г.) получалось, что эта кривая — парабола.



Знание формулы цепной линии необходимо для расчета провисания линий электропередач, поскольку провода между опорами также имеют форму цепной линии.



также Х. Гюйгенс опровергнул это утверждение. Оказалось, что эта кривая описывается формулой  $y = a \frac{e^{x/a} + e^{-x/a}}{2}$ ; она и называется «цепной линией», а задающая ее функция  $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ .



Интересным свойством обладает поверхность, образованная вращением цепной линии вокруг оси абсцисс. Такую поверхность образует мыльная пленка, натянутая на два кольца, центры которых находятся на прямой, перпендикулярной плоскостям этих колец. Она называется катеноидом. Из всех поверхностей, натянутых на такие кольца, расположенные на небольшом расстоянии друг от друга, она имеет наименьшую площадь.

Принцип «цепляния» последующего элемента за предыдущий часто встречается в математике, например в «цепных дробях». Всякую положительную дробь можно записать, и притом единственным образом, в виде:

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_n}}}$$

где числа  $a_1, a_2, \dots, a_n$  — натуральные, а  $a_0$  — целое неотрицательное. Например,

$$\frac{13}{7} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6}}$$
$$\frac{22}{7} = 3 + \frac{1}{7}$$
$$\frac{355}{113} = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{16}}$$

Все иррациональные числа также выражаются цепными дробями. Так,

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}$$
$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}$$
$$\pi = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

Приведенные цепные дроби для  $\frac{22}{7} = 3,1428\dots$  и  $\frac{355}{113} = 3,1415929\dots$  получили «обрываем» цепной дроби для числа  $\pi$ . Интересно, что обыкновенные дроби, полученные «обрываем» цепной дроби для данного числа,

являются наилучшими приближениями среди всех дробей со знаменателем, не большим полученного.

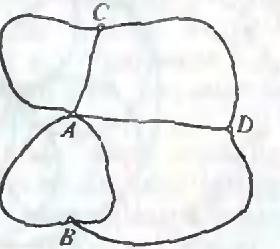
Понятие цепи вводится и в теории графов. Граф — это некоторая совокупность точек (вершин), некоторые из которых соединены отрезками (ребрами). Например,



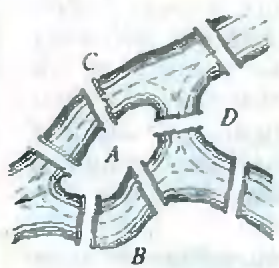
схема железной дороги. Цель на графе — ломаная, составленная из его ребер.



Эйлера цепь — цепь, проходящая по всем ребрам графа. Отсутствие такой цепи на графе, изображенном на рисунке,



означает, что во времена Эйлера было невозможно пройти по всем мостам г. Кенигсберга (теперь г. Калининград), побывав

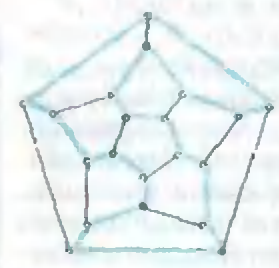


на каждом по одному разу. С этой задачи, поставленной Л. Эйлером, собственно и началась теория графов. Эйлера цепь существует в том и только в том случае, если во всякой вершине (кроме, может быть, двух) сходится четное число ребер.

Гамильтонова цепь — замкнутая цепь, проходящая по всем

В старину деньги не имели той универсальности, как сейчас. И в математическом фольклоре было много задач, связанных с оплатой услуг звеньями золотой цепочки. Например, такая. Молодой человек поселился на постоялом дворе на 31 день и договорился с хозяином платить за постой ежедневно по одному звену своей золотой цепочки из 31 звена, которую он носил на шее. Какое наименьшее число звеньев он должен расковать, чтобы иметь возможность расплатиться? При оплате он может забирать у хозяина ранее данные звенья, заменяя их другими.

Эта задача, конечно, относится к обычной цепочке. Но можно звенья цепочки сцепить так (см. рис.), что при вытаскивании одного звена освободятся все остальные звенья.



вершинам графа, по каждой — один раз. В отличие от эйлера цепь здесь пока нет простого критерия для определения того, существует ли на данном графе гамильтонова цепь.

## Задачи

1. Может ли выражение  $a^2 - b^2 + c^2$  делиться на 5, если ни одно из целых чисел  $a$ ,  $b$  и  $c$  не делится на 5?

2. Собираясь в путешествие на автомобиле, я обнаружил неисправность спидометра и заменил его спидометром от другой машины. Когда я отъезжал от дома, на счетчике спидометра было 131313 км. На шоссе у столба с отметкой 100 км он показывал 131460, еще через 70 км — 132558 км. Когда я добрался до места назначения, счетчик показывал 132713 км. Сколько километров я проехал?

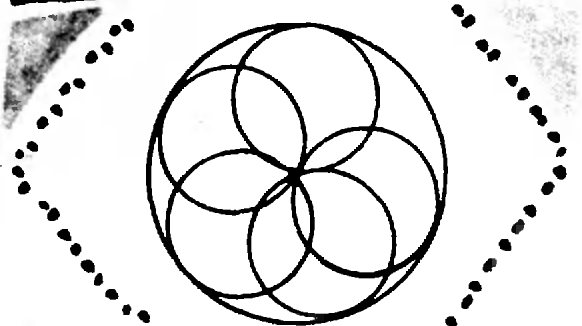
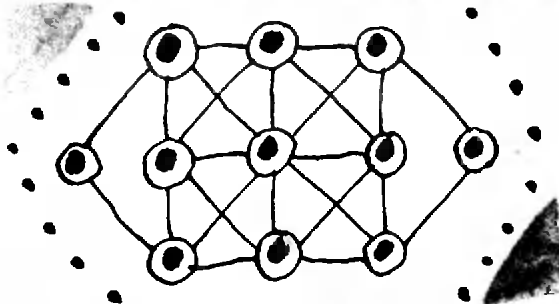
3. Расставьте в кружках фигуры, изображенной на рисунке числа 1, 2, ..., 11 так, чтобы сумма чисел в вершинах каждого квадрата была одна и та же.

4. Милиционер Степан Степанов обернулся на звук бьющегося стекла и увидел четырех подростков, убегающих от разбитой витрины. Через 5 минут они были в отделении милиции.

Андрей заявил, что стекло разбил Виктор, Виктор же утверждал, что виноват Сергей. Сергей заверял, что Виктор лжет, а Юрий твердил, что это сделал не он. Из дальнейшего разговора выяснилось, что лишь один из ребят говорил правду. Кто разбил стекло?

5. Покажите, что длина окружности равна длине границы розочки, полученной из нескольких окружностей вдвое меньшего радиуса, проходящих через ее центр (см. рисунок).

Эти задачи нам предложили С. М. Усов, А. П. Савин, А. М. Домашенко, С. А. Ляшенко и В. В. Произволов.



# ОТВЕТЫ, ОТВЕТЫ...

Если вас заинтересовали вопросы из книги Я. И. Перельмана «Знаете ли вы физику?» (см. «Квант» № 7, с. 44), вам, безусловно, захотелось найти на них ответы. Теперь мы предоставляем вам возможность сравнить ваши ответы с авторскими.

**1. На необитаемом острове.** «Растут ли хоть деревья на этом тропическом острове?» — спрашивает автор немецкой книжки, посвященной разбору Эдисоновой викторины. Вопрос празд-

ный, потому что для опрокидывания скалы никаких деревьев не понадобится: это можно сделать буквально голыми руками.

Рассчитаем, какова толщина скалы, подозрительно не упомянутая в задаче, и дело сразу разъяснится. При общей массе скалы 3 т и при плотности гранита  $3 \text{ г/см}^3$  соображаем, что объем скалы равен  $1 \text{ м}^3$ . А так как длина скалы 30 м (100 футов), высота около 5 м (15 футов), то толщина ее приблизительно 7 мм. Следовательно, на острове возвышалась тонкая стена, всего в 7 мм толщины.

Чтобы подобную стену опрокинуть (если только она не врылась глубоко в почву), достаточно упереться в нее руками или плечом. Вычислим величину нужной для этого силы, обозначив ее через  $F$ . Точка приложения этой силы находится на высоте плеч человека (1,5 м). Момент силы  $F$  относительно «оси опрокидывания» равен  $F \times 1,5 \text{ Н} \cdot \text{м}$ . Опрокидывающему усилию противодействует сила тяжести скалы, приложенная в центре ее тяжести и стремящаяся отвести поворачиваемую стену назад, в прежнее положение. Момент этой силы относительно той же оси равен  $3 \cdot 10^3 \times 10 \times 3,5 \cdot 10^{-3} \text{ Н} \cdot \text{м}$ . Величина силы  $F$  определяется из равенства обоих моментов:  $F = 70 \text{ Н}$ .

Значит, напирая на стену с силою всего 70 Н, человек опрокинет скалу.

**2. На воздушном шаре.** Шар в покое не останется. Пока человек взбирает-

ся по лестнице, аэростат будет опускаться. Здесь происходит то же, что наблюдается, когда вы идете по приставшей к берегу легкой лодке, чтобы выбраться на сушу: лодка отступает под вашими ногами назад. Точно так же и лестница, отталкиваемая вниз ногами взбирающегося по ней человека, будет увлекать аэростат к земле.

Переходя к решению этой задачи с точки зрения законов механики, мы должны рассуждать так. Шар с лестницей и человек на ней представляют собой изолированную систему, центр тяжести которой не может быть перемещен действием внутренних сил. Он сохранит неизменным свое положение при подъеме человека по лестнице только тогда, когда сам шар опустится вниз, — иначе центр тяжести поднялся бы.

Что касается величины перемещения шара, то оно во столько же раз меньше высоты поднятия человека, во сколько раз шар тяжелее человека.

**3. Пластинка на дне сосуда с жидкостью.** В сосуде с водой деревянная пластинка, положенная на дно, всплывает потому, конечно, что вода проникает под пластинку. Остается объяснить, почему вода под деревянную пластинку проникает, а ртуть под стеклянную не проникает.

Надо иметь в виду, что как бы плотно ни прилежала пластинка ко дну, между ними неизбежно будет оставаться тонкий промежуток. У краев этих тесно сближенных поверхностей вода, смачивающая и дерево, и стекло, образует вогнутость, обращенную к свободной от жидкости прослойке; эта вогнутость, как вогнутый мениск, втягивает воду в промежуток между пластинкой и дном.

Иное дело в случае ртути и стеклянной пластинки. Стекло не смачивается ртутью, поэтому между стеклянной пластинкой и стеклянным же дном ртуть образует выпуклость, обращенную к свободной прослойке;



выпуклость эта давит наружу и не допускает ртути под пластинку.

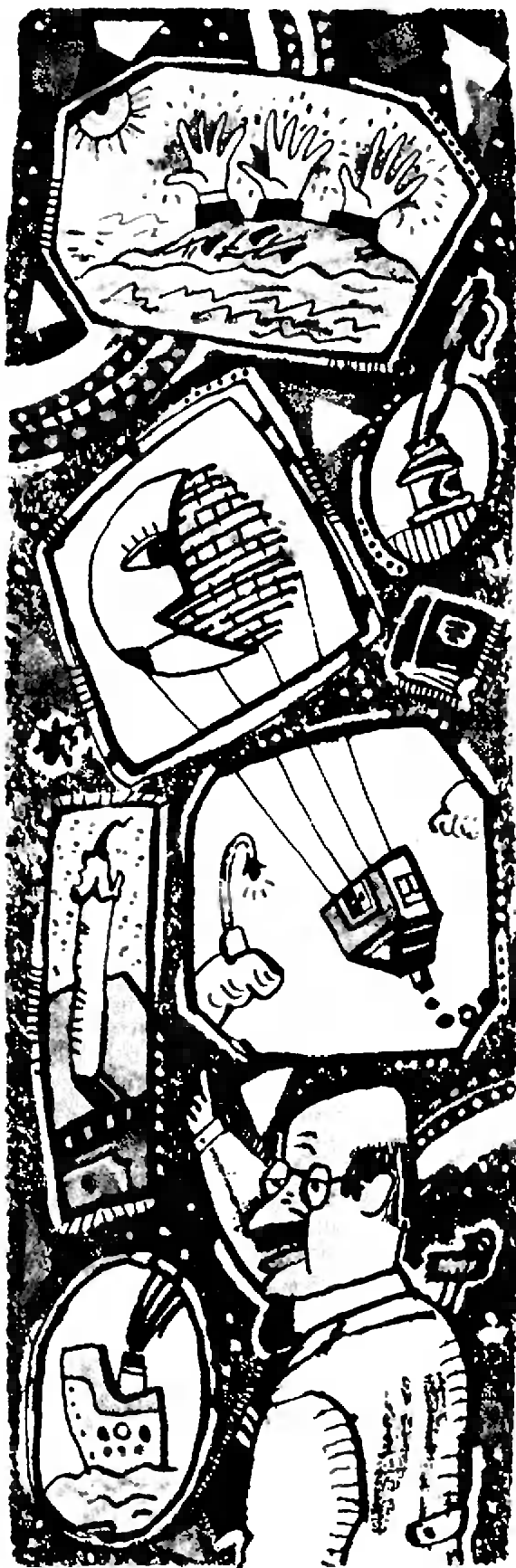
4. **Задача Колладона.** Так как поверхность реки представляет собою наклонную плоскость, можно думать, что движение судна вверх по течению требует такой же затраты работы, как и скольжение тела вверх по наклонной плоскости. Но не следует упускать из виду, что сила тяжести пловущего в воде судна уравновешивается выталкивающей силой воды, поэтому подъем пловущего судна на более высокий уровень не требует никакой силы. Работа такого поднятия равна нулю, принимать ее в расчет не следует.

Любопытно, что из студентов академии, где задача была предложена, правильное ее решение дал только один, впоследствии сделавшийся известным во Франции инженером-путейцем.

5. **Вода в опрокинутом стакане.** Ошибочно полагать, будто в стакане имеется только вода, а воздуха нет вовсе, так как бумажка прилегает к воде вплотную. Там безусловно есть и воздух. Если бы между двумя соприкасающимися плоскими предметами не было прослойки воздуха, мы не могли бы приподнять со стола ни одной вещи, опирающейся на стол плоским основанием: пришлось бы преодолевать атмосферное давление. Накрывая поверхность воды листком бумаги, мы всегда имеем между ними тонкий слой воздуха.

Проследим за тем, что происходит при перевертывании стакана дном вверх. Под тяжестью воды бумажка выдается слегка вниз, так что для небольшого количества воздуха, которое имелось между водой и бумажкой, освобождается некоторое пространство под доньшком стакана. Пространство это больше первоначального; воздух, следовательно, разрежается, и давление его падает.

Теперь на бумажку действуют: снаружи — полное давление атмосферы, изнутри — неполное атмосферное давление плюс давление воды. Оба давления, наружное и внутреннее, уравновешиваются. Достаточно



поэтому приложить к бумажке небольшое усилие, чтобы преодолеть силу прилипания (обусловленную поверхностным натяжением жидкой пленки), — и бумажка отпадет.

Выпячивание бумажки действием веса воды должно быть ничтожно. Когда пространство, заключающее воздух, увеличится на 0,01 часть, на такую же долю уменьшится давление воздуха в стакане. Недостающая сотая доля атмосферного давления покрывается весом 10 см водяного столба. Если слой воздуха между бумажкой и водой имел первоначально толщину в 0,1 мм, то достаточно увеличения его толщины на  $0,01 \times 0,1$ , т. е. на 0,001 мм (один микрон), чтобы объяснить удержание бумажки у краев перевернутого стакана. Нечего и пытаться поэтому уловить непосредственно глазом это выпячивание бумажки.

**6. Сифон в пустоте.** На вопрос, может ли сифон переливать жидкость в пустоте, отвечают обычно категорически «нет». Такой ответ получал я и от учащихся, и от преподавателей средней школы, и иной раз от профессоров высшей школы. Большинство школьных учебников и значительная часть университетских безоговорочно считают давление воздуха единственной причиной, обуславливающей переливание жидкости сифоном. Между тем, это — физический предрассудок.

Как же объяснить работу сифона, не опираясь на давление атмосферы? Позволю себе привести соответствующие строки из моей «Технической физики» (1927 г.):

«Так как правая половина жидкой нити сифона длиннее, а следовательно, и тяжелее левой, то она перетягивает и заставляет жидкость все время течь в трубке по направлению к длинному концу. Это наглядно поясняется сопоставлением с веревкой, перекинутой через блок».

**7. Нагревание плотничьего уровня.** На вопрос задачи нередко отвечают, что пузырек уровня в теплую погоду больше, чем в холодную, так как заключенный в нем газ под дей-

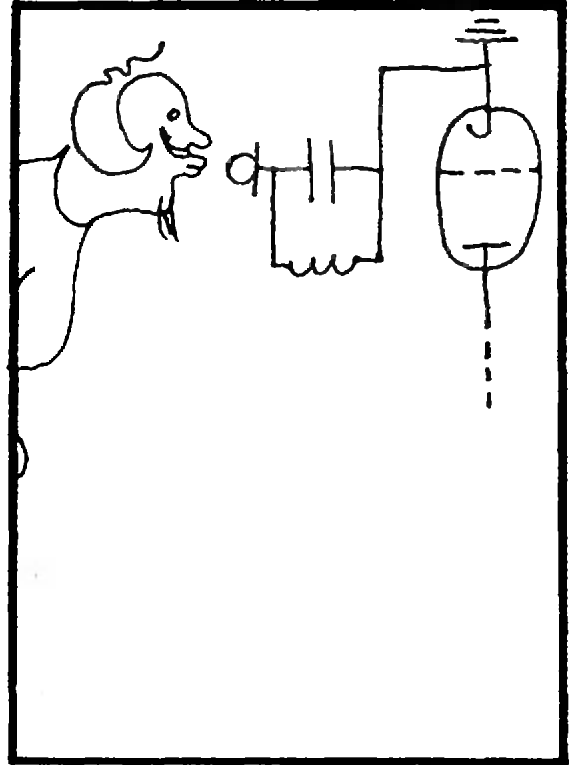
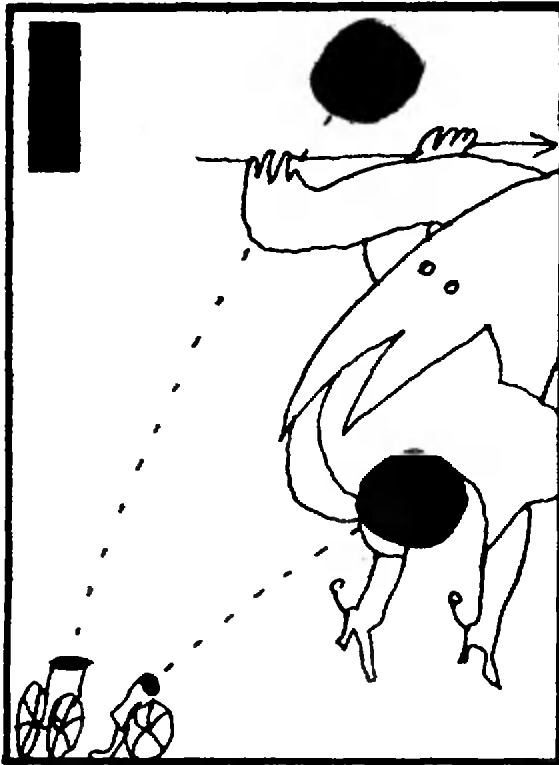
ствием тепла расширяется. Забывают, однако, что в данных условиях газ не может расширяться: этому препятствует замкнутая в трубке жидкость. Нагреваются все части уровня: твердая оправа, стеклянная трубка, жидкость, газ в пузырьке. Расширение оправы и трубки весьма незначительно; расширение жидкости больше расширения трубки и потому должно сжимать пузырек.

Итак, пузырек уровня в теплую погоду меньше, чем в холодную.

**8. Замерзание воды в трубах.** То, что в трубах подвалов вода замерзает часто не в морозные дни, а в оттепель, многим представляется совершенно необъяснимым. Это озадачивающее явление находит себе, однако, естественное объяснение в дурной теплопроводности почвы. Тепло проходит через землю так медленно, что минимум температуры наступает в почве позднее, чем на поверхности земли; чем глубже, тем опоздание больше. Часто случается поэтому, что за время морозов почва на глубине пролегания водопроводных труб, а также подземные помещения не успевают охладиться ниже нуля — и вода в таких трубах еще не замерзает. Лишь потом, когда над землей наступает уже оттепель, под землю доходят отголоски морозов. Самая низкая температура под землей совпадает по времени с повышением температуры воздуха над землей — трубы замерзают, когда над землей уже оттепель.

**9. Почему снег белый.** Снег имеет белый цвет по той же причине, по какой кажется белым толченое стекло и вообще всякое измельченное прозрачное вещество. Растолките лед в ступке или наскребите его ножом — и у вас получится порошок белого цвета. Цвет этот обусловлен тем, что лучи света, проникая в мелкие кусочки прозрачного льда, не проходят сквозь них, а отражаются внутрь на границах льдинок и воздуха (полное внутреннее отражение) до тех пор, пока не выйдут наружу, причем в произвольном направлении.

(Окончание см. на с. 66)



## Школа "Кванте"

### Физика 8, 9, 10

Публикуемая ниже заметка «Относительность движения» предназначена восьмиклассникам, заметка «Модуляция и модуляторы» — десятиклассникам.

#### Относительность движения

Как известно, движение любого тела относительно, т. е. его перемещение, скорость, вид траектории зависят от того, в какой системе отсчета (с. о.) рассматривается это движение. При описании движения можно использовать различные системы отсчета, покоящиеся или движущиеся.

Для перехода из одной системы в другую часто достаточно записать закон сложения перемещений или за-

кон сложения скоростей:

$$\vec{s}_1 = \vec{s}_{12} + \vec{s}_2, \quad \vec{v}_1 = \vec{v}_{12} + \vec{v}_2. \quad (1)$$

Здесь  $\vec{s}_1$  ( $\vec{v}_1$ ) — перемещение (скорость) тела относительно первой с. о., например покоящейся,  $\vec{s}_{12}$  ( $\vec{v}_{12}$ ) — перемещение (скорость) тела относительно второй с. о., например движущейся,  $\vec{s}_2$  ( $\vec{v}_2$ ) — перемещение (скорость) второй с. о. относительно первой. Так, скорость самолета относительно земли есть скорость самолета относительно воздуха плюс скорость самого воздуха (скорость ветра):  $\vec{v}_c = \vec{v}_{cb} + \vec{v}_b$ .

В случае неравномерного движения действует также закон сложения ускорений:

$$\vec{a}_1 = \vec{a}_{12} + \vec{a}_2, \quad (2)$$

где  $\vec{a}_1$  — ускорение тела относительно покоящейся с. о.,  $\vec{a}_{12}$  — ускорение тела

относительно движущейся с. о.,  $\vec{a}_2$  — ускорение этой с. о.

Формулы (1) и (2) можно переписать в более симметричном и удобном для запоминания виде, прямо выразив относительное перемещение (скорость, ускорение) двух тел:

$$\begin{aligned} \vec{s}_{12} &= \vec{s}_1 - \vec{s}_2, & \vec{v}_{12} &= \vec{v}_1 - \vec{v}_2, & (3) \\ \vec{a}_{12} &= \vec{a}_1 - \vec{a}_2. \end{aligned}$$

Например, скорость лодки относительно воды есть скорость лодки минус скорость воды (скорость течения):

$$\vec{v}_{лв} = \vec{v}_л - \vec{v}_в.$$

Заметим, что все сказанное справедливо для поступательного движения одной с. о. относительно другой (координатные оси движущейся с. о. все время параллельны координатным осям неподвижной с. о.). Кроме того, скорости всех тел должны быть малы по сравнению со скоростью света  $c = 300\,000$  км/с, иначе вступают в силу закономерности теории относительности Эйнштейна, которые отличаются от вышеприведенных.

Поставим теперь перед собой такой вопрос: а зачем вообще нужно менять систему отсчета? Разве не удобнее, во избежание путаницы, раз и навсегда выбрать какую-нибудь одну? Оказывается, это не так, и можно назвать несколько причин тому.

Во-первых, во многих ситуациях мы просто вынуждены привлекать вторую с. о. — без этого нельзя решить поставленную задачу. Рассмотрим для примера полет самолета в ветреную погоду. Приборы, регистрирующие выбранный летчиком курс, показывают, как расположена ось корпуса самолета по отношению к магнитной стрелке компаса, а скорость самолета измеряется по обтеканию самолета потоком воздуха. Смысл этих измерений становится понятным и однозначным, если перейти в систему отсчета, связанную с воздухом: они определяют направление и величину скорости самолета в этой с. о. Но обойтись только этой с. о. мы не можем — нам ведь надо управлять движением самолета относитель-

но земных ориентиров (аэродромы взлета и посадки). Запишем закон сложения скоростей

$$\vec{v}_c = \vec{v}_{cv} + \vec{v}_s$$

и представим его графически (рис. 1). Обычно задаются направление и скорость ветра (данные метеослужбы); направление на цель (т. е. направле-

ние вектора  $\vec{v}_c$ ); величина скорости самолета относительно ветра (при оптимальном режиме работы двигателей) или величина скорости самолета относительно земли (диспетчер требует прилететь минута в минуту!). Этих данных достаточно, чтобы по двум сторонам и углу найти все остальные элементы треугольника скоростей (например, угол  $\theta$  — поправку к курсу при наличии ветра).

Во-вторых, часто переход в другую систему отсчета, хотя и не является обязательным, может существенно упростить решение задачи, сделать ситуацию более наглядной. Обсудим, например, движение пушечных ядер после одновременного выстрела из двух пушек (рис. 2). Как узнать, на каком расстоянии друг от друга пролетят ядра? Оказывается, проще всего это сделать, «оседлав», наподобие барона Мюнхгаузена, одно из ядер.

Относительное ускорение ядер  $\vec{a}_{12} = \vec{a}_1 - \vec{a}_2 = \vec{g} - \vec{g} = 0$  (сопротивление воздуха мы не учитываем). Это означает, что с точки зрения Мюнхгаузена

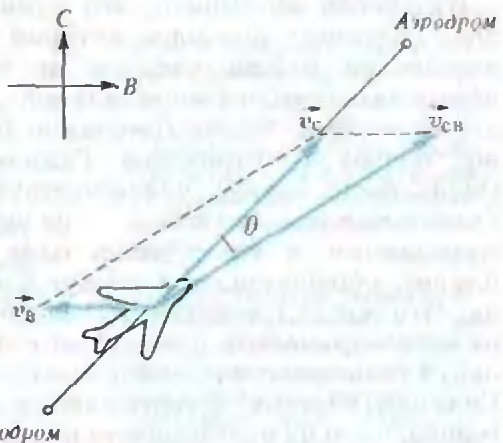


Рис. 1.



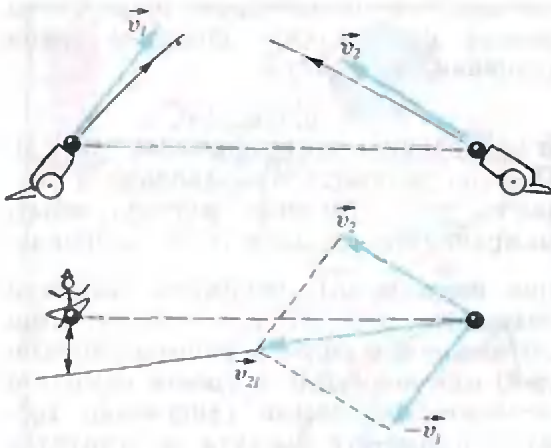


Рис. 2.

второе ядро летит равномерно и прямолинейно со скоростью  $\vec{v}_{21} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ . Определив графически направление этой скорости, легко найдем, на каком наименьшем расстоянии от барона пролетит второе ядро (надо только убедиться в том, что до этого момента ни одно из ядер не упадет на землю).

Конечно, можно провести все расчеты, и не используя систему отсчета Мюнхгаузена, но они будут более громоздкими. Разобранный «принцип барона Мюнхгаузена» — относительное движение двух свободно летящих тел является равномерным — находит применение во многих задачах. Попробуйте, например, объяснить, почему во время салюта после разрыва снаряда образуется светящийся шар, увеличивающийся в размерах и падающий вниз.

Интересно вспомнить, что один из драматических эпизодов истории человеческой мысли касался не чего иного, как... выбора «правильной» системы отсчета. Казнь Джордано Бруно, борьба и отречение Галилея... Очень было трудно человечеству согласиться с тем, что Земля — не центр мироздания, а всего лишь одна из планет, обращающихся вокруг Солнца. Что же дал человечеству переход от геоцентрической (связанной с Землей) к гелиоцентрической (связанной с Солнцем) системе? В свете нашего разговора, одно из преимуществ перехода в том, что в солнечной системе отсчета движение планет выглядит го-

раздо проще. Очевидно, благодаря и этому тоже, Кеплеру впоследствии удалось открыть законы движения планет, что, в свою очередь, помогло Ньютону открыть закон всемирного тяготения.

В чем же заключается основное преимущество солнечной с. о. перед земной? Чуть позже вы узнаете, что с точки зрения динамики не все с. о. равноправны — есть так называемые инерциальные с. о., в которых законы механики приобретают особенно простой вид. Так вот, солнечную с. о., в отличие от земной, можно считать инерциальной. Но с точки зрения кинематики все с. о. равноправны, можно использовать любые, в том числе движущиеся с ускорением и даже вращающиеся. Впрочем, вращающиеся с. о. обладают некоторыми необычными особенностями, требующими отдельного внимательного обсуждения, которое не предусмотрено рамками этой заметки.

А. И. Черноуцан

## Модуляция и модуляторы

Для передачи сигналов на большие расстояния обычно используют радиоволны. Их легко излучать и принимать, на них можно «наложить» любую информацию, выбор диапазонов длин волн очень широк — от сотен и тысяч метров до миллиметров (а для специальных случаев — и короче). Все это позволяет решать самые разные задачи — от вещания на весь мир до работы местных программ, которые не создают помех соседним областям. В последние годы широко используются спутники связи — но это тема для отдельного разговора.

Разберемся подробнее в процессах радиопередачи и радиоприема. Для этого посмотрим, какие превращения претерпевает звуковой сигнал на пути от исполнителя до радиослушателя.

Начинается все с преобразования звуковых (механических) колебаний — тех звуков, которые мы производим и слышим, — в электрические сигналы. Это делается при помощи микрофона. В самом распространенном на практике микрофоне — динамическом — звуковые волны вызывают колебания мембраны, к которой прикреплена катушка, помещенная в поле постоянного магнита. При движении катушки в ней возникает ЭДС индукции — тот электрический сигнал, который нам нужен. Обычно действующее значение напряжения от микрофона очень мало — доли милливольт, и его усиливают в несколько тысяч раз при помощи электронной схемы. В усиленном виде сигнал уже годится для передачи по проводам, а для радиопередачи его нужно продолжать преобразовывать. (Для телефонной связи усиление сигнала слишком дорого и сложно, там используют микрофоны другого типа — угольные, позволяющие обходиться вовсе без усилителей, однако качество звукопередачи при этом ниже всякой критики — каждый из вас, наверное, мог в этом убедиться сам.)

Итак, электрический сигнал получен. Рассмотрим простой случай — перед микрофоном звучит камертон и громкость звука со временем не меняется; тогда электрический сигнал представляет собой гармонические колебания низкой (звуковой) частоты  $\Omega$  (рис. 1).

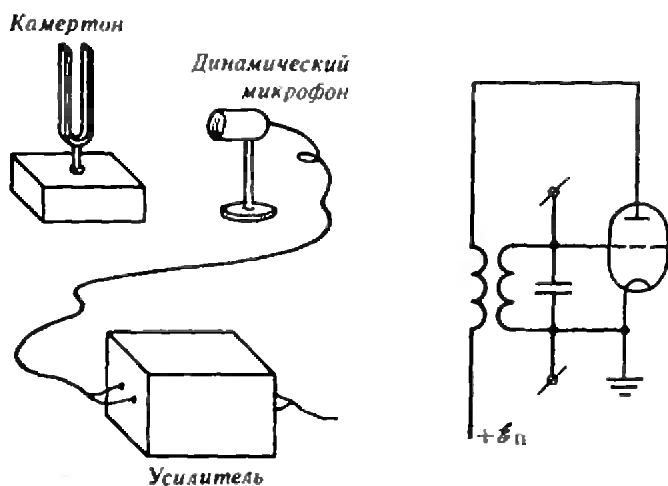


Рис. 1. Получение электрического сигнала звуковой частоты. Этот сигнал имеет вид  $u(t) = U_0 \cos \Omega t$ , где  $U_0$  — амплитуда,  $\Omega$  — частота колебаний (начальная фаза в данном случае не важна — подумайте, почему, — и ее принимают равной нулю).

Рис. 2. Схема получения колебаний несущей частоты. Колебания происходят по закону  $u(t) = V_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$ , где  $V_0$  — амплитуда,  $\omega$  — частота,  $\varphi_0$  — начальная фаза колебаний (здесь мы уже не можем взять  $\varphi_0 = 0$ , хотя для радиоприема это и не важно).

Теперь поговорим о «переносчике» сигнала — о колебаниях высокой частоты  $\omega$ . Их дает генератор незатухающих колебаний (рис. 2). Несущая частота  $\omega$  выбирается во много раз выше звуковой частоты  $\Omega$  передаваемого сигнала. Для примера — камертон обычно дает  $\Omega = 2770 \text{ с}^{-1}$ , при передаче на средних волнах  $\omega \approx 6 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$ .

Для передачи электрического сигнала звуковой частоты его нужно «заложить» в какой-нибудь параметр высокочастотных колебаний — в амплитуду, частоту или фазу (или в их комбинации). Иными словами, выбранный параметр нужно изменять (модулировать) в соответствии с передаваемым сигналом. Главное требование при этом — чтобы преобразование было обратимым и при приеме можно было легко восстановить переданный сигнал.

Обычно применяют амплитудную, частотную или фазовую (возможны и более сложные комбинированные виды) модуляцию (рис. 3). Проще всего использовать амплитудную. При этом передаваемый в «эфир» сигнал — его называют амплитудно-модулированным — получают, например, изменяя напряжение питания генератора незатухающих колебаний в такт с сигналом звуковой частоты. Но можно обойтись и совсем простыми средствами — включить в провод, идущий от генератора незатухающих колебаний к передающей

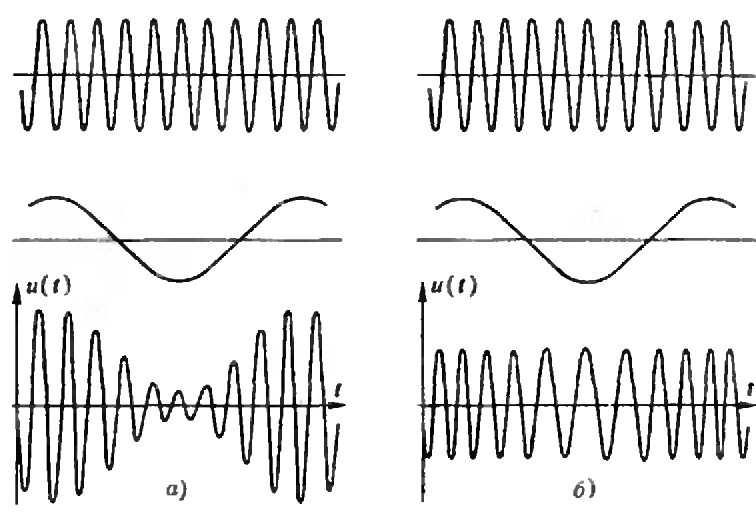


Рис. 3. Так (условно, конечно) можно изобразить сигналы с амплитудной (а) и частотной (б) модуляцией.

антенне, обычный угольный микрофон (рис. 4). Если перед ним говорить, то сопротивление микрофона будет меняться, в такт с ним будет изменяться ток в антенне, и мы получим нужную нам амплитудную модуляцию. На заре радиосвязи именно так и поступали радиолюбители, которые хотели перейти от работы «морзянкой» к передаче речи. Конечно, этот способ годится только для маломощных устройств и качество такой передачи будет не очень хорошим.

Обратное преобразование амплитудно-модулированных сигналов на приемной стороне производится при помощи амплитудного детектора — простой схемы, содержащей полупроводниковый диод (рис. 5). Собственно, именно простота такого детектора и есть главное достоинство амплитудной модуляции. Этот вид модуляции используют для радиовещания в диапазонах длинных, средних и коротких волн. Используют его и для передачи телевизионных сигналов, но только вместе с другими видами модуляции. Поговорим немного и о них.

Большое распространение получила частотная модуляция. При этом способе радиопередачи сигнал низкой частоты «заложен» в значение мгновенной частоты передатчика (мгновенной — потому что она теперь не остается постоянной, а меняется в такт с низкочастотным сигналом). Такую

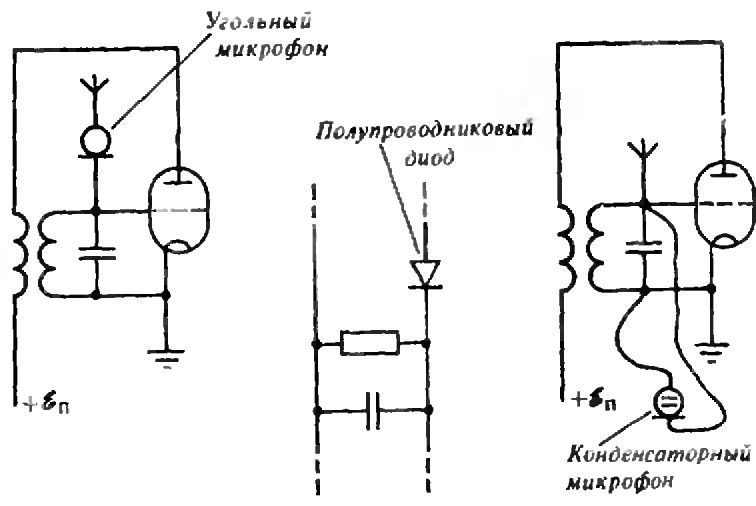
модуляцию тоже легко осуществить «домашним» способом — для этого удобно применить микрофон так называемого конденсаторного типа (рис. 6). Это очень простой (по идее, а не для практического изготовления!) прибор. Он состоит из тончайшей металлизированной мембраны, которая является одной из обкладок плоского конденсатора, и самой обычной пластины — второй обкладки. Мембрана колеблется в такт с колебаниями воздуха, и соответственно меняется емкость конденсатора — вот и все. Мембрану несложно сделать совсем легкой, поэтому такой микрофон может обеспечивать превосходное качество преобразования звукового сигнала в электрический. Для нашей цели конденсаторный микрофон подключают параллельно конденсатору контура генератора незатухающих колебаний, и изменение емкости микрофона дает необходимый эффект модуляции. Так можно изготовить простой и вполне качественный радиомикрофон, работающий в диапазоне УКВ, а сигналы его можно принимать обычным УКВ ЧМ приемником («УКВ» — ультракороткие волны, «ЧМ» — частотная модуляция).

Самое сложное при таком способе модуляции — это демодуляция (детектирование). Ее можно делать, например, так: используем колебательный контур, настроенный немного неточно — на несколько десятков ки-

Рис. 4. Схема получения амплитудно-модулированного сигнала, имеющего вид  $u(t) = V_0(1 + u_0 \cos \Omega t) \cos(\omega t + \varphi_0)$ , где  $u_0$  — постоянная величина, называемая глубиной модуляции.

Рис. 5. Простейшая схема демодуляции (детектирования) амплитудно-модулированного сигнала.

Рис. 6. Схема получения частотно-модулированного сигнала, который можно представить в виде  $u(t) = V_0 \cos(\omega_0(1 + \beta U_0 \cos \Omega t)t + \varphi_0)$ , где  $\beta$  — постоянная величина, называемая индексом частотной модуляции.



логерц в сторону от частоты сигнала передатчика (от среднего значения частоты). Тогда при подаче нашего сигнала на контур амплитуда начнет меняться в такт с изменениями частоты (мы «ходим» по резонансной кривой контура), т. е. частотная модуляция вызывает амплитудную, а в таком случае уже подходит обычный амплитудный детектор. На практике поступают почти так, только вместо контура используют более сложную колебательную систему, у которой, в отличие от простого колебательного контура, зависимость амплитуды от частоты получается почти линейной. Впрочем, в последнее время применяют и куда более сложные электронные схемы, дающие более высокое качество, а главное —

значительно большую устойчивость к воздействиям помех.

Частотную модуляцию используют для передачи звуковых программ в диапазоне УКВ, в частности — для передачи звука в телевидении, а также для передачи сигналов, несущих информацию о цвете в применяемой в нашей стране системе SECAM. В других распространенных системах (PAL, NTSC) для передачи информации о цвете применяют фазовую модуляцию. Поэтому блоки выделения цветовой информации в перспективных ТВ-приемниках предусматривают работу по любой из систем, причем переключение режимов работы легко можно сделать автоматическим.

А. Р. Зильберман

## Вариации на тему Евклида

Читатели «Кванта», наверное, помнят, как Евклид доказывает, что простых чисел бесконечно много: если  $p_1, \dots, p_n$  — простые, то число  $E = p_1 p_2 \dots p_n + 1$  не делится ни на одно из чисел  $p_i$ . Поэтому среди его делителей есть новые простые числа.

Нельзя ли применить это изыщное рассуждение к другой задаче — задаче о неприводимых многочленах? Мно-

гочлен с целыми коэффициентами называется *неприводимым*, если его нельзя представить в виде произведения многочленов с целыми коэффициентами. Например,  $x^3 - x^2 + x - 5$  — неприводимый многочлен, а  $x^3 - x^2 + x - 6$  — приводимый. Возникает вопрос: существуют ли неприводимые многочлены сколь угодно высокой степени?

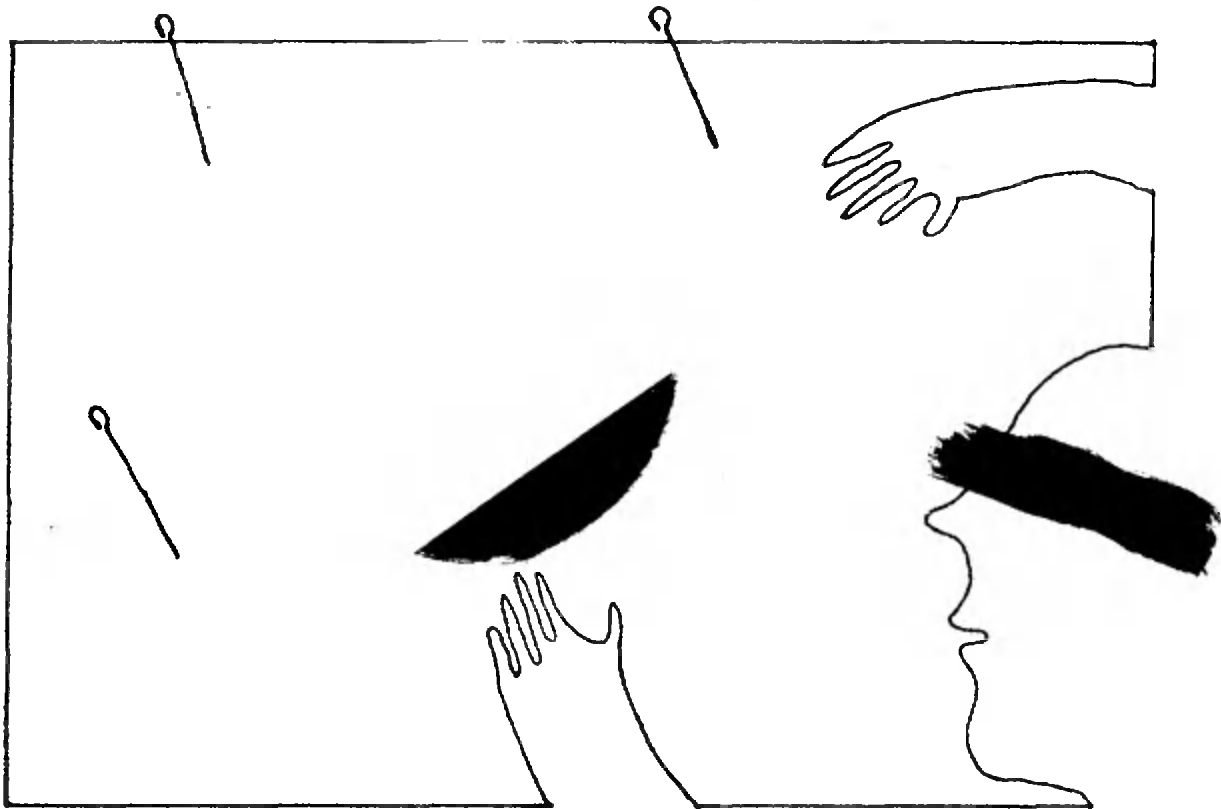
В духе Евклида легко доказать, что неприводимых многочленов бесконечно много: если  $p_1(x), \dots, p_n(x)$  — не приводимые многочлены, то  $E(x) = p_1(x)p_2(x)\dots p_n(x) + 1$  не де-

лится ни на один из многочленов  $p_i(x)$ . Поэтому среди его делителей есть новые неприводимые многочлены. Однако то, что неприводимых многочленов бесконечно много, очевидно и без Евклида: таковы линейные многочлены  $x, x+1, x+2, x+3, \dots$

И все же рассуждение Евклида позволяет доказать, что существуют неприводимые многочлены сколь угодно высокой степени. Для этого нужно считать коэффициенты многочленов не целыми числами, а вычетами по модулю

(Окончание см. на с. 70)





## Математический кружок

### Узнайте точку

И. Ф. ШАРЫГИН

В геометрии очень важны свойства фигур, однозначно их описывающие или относящие к вполне определенному классу фигур,— так называемые «признаки». Вы знакомы, например, с целым рядом признаков параллелограмма и без труда узнаете его в четырехугольнике с попарно равными противоположными сторонами или с диагоналями, делящимися пополам их точкой пересечения, и т. д. Существуют и другие, более «хитрые», признаки параллелограмма. Известно, например, что в параллелограмме сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов сторон. Оказывается, верно и обратное утверждение: если в четырехугольнике сумма квадратов сторон равна сумме квадратов диагоналей, то

этот четырехугольник — параллелограмм.

**Упражнение 1.** Докажите это самостоятельно. (Указание. Из прямой теоремы получите формулу, выражающую квадрат медианы треугольника через квадраты его сторон. Пользуясь этой формулой, выразите квадрат расстояния между серединами диагоналей четырехугольника через квадраты его сторон и диагоналей.)

В этой статье мы немного поговорим о «признаках точки». В школьном курсе изучается несколько «замечательных» точек треугольника. Это точки обладают целым рядом интересных свойств, большинство из которых эту точку однозначно определяет. Однако часто мы с трудом «узнаем» точку, даже если указаны хорошо известные ее свойства.

#### Точка пересечения медиан (центроид)

Некоторые характерные свойства «замечательной» точки могут быть

использованы не только для «узнавания» ее, но и для доказательства ее существования.

Многие школьники знают о том, что медианы треугольника пересекаются в одной точке, хотя не все умеют это доказывать. С другой стороны, нетрудно доказать, что внутри любого треугольника  $ABC$  существует точка  $M$  такая, что треугольники  $ABM$ ,  $BСM$  и  $СAM$  равновелики (рис. 1). Самое лучшее — просто построить эту точку. Поскольку площадь треугольника  $ABM$  составляет  $1/3$  площади треугольника  $ABC$ , точка  $M$  расположена на прямой, параллельной  $AB$  и удаленной от  $AB$  на расстояние, равное  $1/3$  соответствующей высоты. Точно так же,  $M$  должна быть расположена на аналогичной прямой, параллельной  $BC$ , т. е.  $M$  — точка пересечения этих двух прямых. Поскольку площади треугольников  $ABM$  и  $BСM$  равны  $1/3$  площади треугольника  $ABC$ , площадь треугольника  $СAM$  также равна  $1/3$  площади  $ABC$ .

Теперь докажем, что через точку  $M$  проходят все медианы данного треугольника и делятся в ней в отношении  $2:1$ , считая от вершин треугольника. В самом деле, из равновеликости треугольников  $ABM$  и  $BСM$  следует, что точки  $A$  и  $C$  равноудалены от прямой  $BM$ , а значит, эта прямая должна проходить через середину отрезка  $BC$  (эта прямая не может быть параллельной  $BC$ ). А из того, что площадь треугольника  $СAM$  составляет  $1/3$  площади  $ABC$  следует, что расстояние от  $M$  до  $CA$  вдвое меньше расстояния от  $B$  до  $CA$ , а зна-

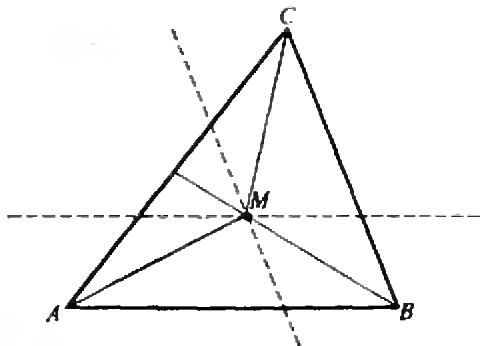


Рис. 1.

чит,  $M$  делит медиану  $BB_1$  в отношении  $BM:BM_1=2$ . Таким образом, медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в указанном отношении. Итак, мы получили признак центроида:

Признак  $M_1$ . Внутренняя точка  $M$  треугольника  $ABC$  является центроидом тогда и только тогда, когда треугольники  $ABM$ ,  $BСM$  и  $СAM$  равновелики.

Докажем еще два признака центроида.

Для того чтобы точка  $M$  являлась центроидом треугольника  $ABC$  необходимо и достаточно каждое из следующих условий.

Признак  $M_2$ .  $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0}$ .

Признак  $M_3$ .  $MA^2 + MB^2 + MC^2 = \frac{1}{3}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$ .

Доказательство. Начнем с  $M_2$ . Пусть  $M$  — точка пересечения медиан треугольника  $ABC$  (рис. 2).

Имеем  $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{MA} + (\vec{MA}_1 + \vec{A_1B}) + (\vec{MA}_1 + \vec{A_1C}) = (\vec{MA} + 2\vec{MA}_1) + (\vec{A_1B} + \vec{A_1C}) = \vec{0}$ . Обратно, пусть для точки  $M$  выполняется признак  $M_2$  и  $A_1$  — точка пересечения  $MA$  с  $BC$ . (Докажите, что прямая  $MA$  не может быть параллельной  $BC$ .) Тогда, как и выше, будем иметь  $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = (\vec{MA} + 2\vec{MA}_1) + (\vec{A_1B} + \vec{A_1C}) = \vec{0}$ . Но сумма двух неколлинеарных векторов, записанных в скобках, может равняться нулю только при условии, что каждый вектор равен нулю. Следовательно,  $A_1$  — середина  $BC$ .

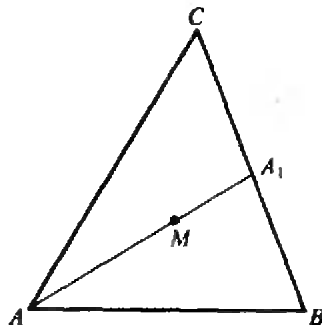


Рис. 2.

Докажем теперь, что признак  $M_3$  эквивалентен признаку  $M_2$ . Пусть  $M$  — произвольная точка плоскости. Прежде всего, заметим, что из равенства  $\vec{MA} - \vec{MB} = \vec{BA}$  после возведения его в квадрат, получим  $2\vec{MA} \cdot \vec{MB} = MA^2 + MB^2 - AB^2$ .

Аналогичные равенства верны для  $2\vec{MB} \cdot \vec{MC}$  и  $2\vec{MC} \cdot \vec{MA}$ . Далее,  $0 \leq (\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC})^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 + 2\vec{MA} \cdot \vec{MB} + 2\vec{MB} \cdot \vec{MC} + 2\vec{MC} \cdot \vec{MA} = 3(MA^2 + MB^2 + MC^2) - (AB^2 + BC^2 + CA^2)$ . Таким образом, из равенства 2 следует равенство 3, и наоборот. Попутно мы доказали, что  $MA^2 + MB^2 + MC^2$  достигает наименьшего значения, если  $M$  — центр тяжести (и это тоже является признаком центра тяжести).

В качестве иллюстрации решим следующую задачу.

**Задача 1.** На сторонах треугольника во внешнюю сторону построены квадраты. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника с вершинами в центрах квадратов совпадает с точкой пересечения медиан данного треугольника.

**Решение.** Пусть  $M$  — точка пересечения медиан треугольника  $ABC$ ,  $A_1$  — середина  $BC$ ,  $A_2$  — центр квадрата, построенного на  $BC$  (рис. 3).

Тогда  $\vec{MA} = \vec{MA_1} + \vec{A_1A_2}$ . Имеем  $\vec{MA_2} + \vec{MB_2} + \vec{MC_2} = (\vec{MA_1} + \vec{MB_1} + \vec{MC_1}) + (\vec{A_1A_2} + \vec{B_1B_2} + \vec{C_1C_2})$ . Но сумма векторов в каждой из скобок равна нулю. В первой — по признаку  $M_2$ . Во второй — потому, что каждый из векторов этой суммы получается соответственно из  $\frac{1}{2}\vec{BC}$ ,  $\frac{1}{2}\vec{CA}$  и  $\frac{1}{2}\vec{AB}$  поворотом на  $90^\circ$  по часовой стрелке. Значит,  $M$  — центр тяжести треугольника  $A_2B_2C_2$ .

### Центр описанной окружности

На этот раз мы не станем дополнять школьную теорию, а рассмотрим два примера.

**Задача 2.** В треугольнике  $ABC$  известны углы:  $\angle A = 30^\circ$ ,  $\angle B = 80^\circ$ .

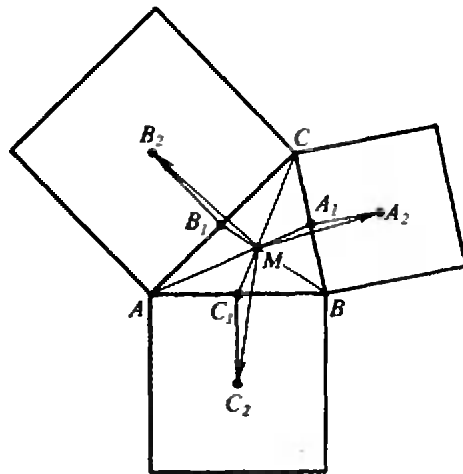


Рис. 3.

Внутри треугольника взята точка  $K$  такая, что  $BCK$  — правильный треугольник. Найдите  $\angle KAC$ .

**Решение.** Эта задача предлагалась на районном туре Московской олимпиады 1989 года в 10 классе. Большинство участников олимпиады пытались решить ее «счетом» при помощи теоремы синусов, не увидев, что точка  $K$  — центр описанной около  $ABC$  окружности. В самом деле, из центра описанной около  $ABC$  окружности сторона  $BC$  видна под углом  $2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$ , расположен этот центр внутри треугольника (треугольник — остроугольный) и лежит на серединном перпендикуляре к  $BC$ . Итак,  $K$  — центр описанной окружности (рис. 4),  $\angle CKA = 2 \cdot 80^\circ = 160^\circ$ ,  $\angle KAC = \angle KCA = 10^\circ$ .

**Задача 3.** В выпуклом четырехугольнике  $ABCD$  известны углы:  $\angle BAC = 25^\circ$ ,  $\angle BCA = 20^\circ$ ,  $\angle BDC = 50^\circ$ ,  $\angle BDA = 40^\circ$ . Найдите угол между диагоналями этого четырехугольника.

**Решение.** Можно провести косвенное рассуждение, доказывающее, что точка  $D$  является центром описанной около  $ABC$  окружности. Поскольку треугольник  $ABC$  — тупоугольный, центр описанной окружности расположен по другую сторону от  $AC$ , чем вершина  $A$ , причем из этого центра стороны  $BC$  и  $BA$  видны соответственно под углами  $50^\circ$  и  $40^\circ$ . Кроме того, такая точка единственна (убедитесь в этом).

Но в геометрии, как правило, «приятнее» выглядят прямые доказательства. Угадав роль точки  $D$ , легко найдем и соответствующее прямое рассуждение. Опишем около  $ABC$  окружность и продолжим  $BD$  до второго пересечения с этой окружностью (рис. 5). В треугольнике  $DKA$  имеем  $\angle DKA = \angle BCA = 20^\circ$ , а внешний угол при вершине  $D$  равен  $40^\circ$ . Следовательно,  $\angle DAK = 20^\circ$  и  $DK = DA$ . Аналогично,  $DK = DC$ , и  $D$  — центр описанной около  $DKA$ , а значит, и  $ABC$ , окружности. Угол между диагоналями равен  $85^\circ$ .

### Центр вписанной окружности

Пусть  $I$  — центр окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ . Укажем сначала на два свойства этого центра, с помощью которых можно получать различные признаки центра вписанной окружности.

Свойство 1.  $\angle AIC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle B$ .

Свойство 2. Прямая  $BI$  проходит через центр окружности, описанной около треугольника  $AIC$ .

Исходя из этих свойств, можно получить следующие признаки.

Признак  $I_1$ . Если  $M$  — точка внутри треугольника  $ABC$ , причем  $\angle BMC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A$  и прямая  $AM$  проходит через центр описанной около  $BMC$  окружности, то  $M$  — центр вписанной в  $ABC$  окружности.

Признак  $I_2$ . Если  $M$  — точка внутри треугольника  $ABC$  и прямая  $AM$  проходит через центр описанной

около  $BMC$  окружности, а прямая  $BM$  проходит через центр описанной около  $AMC$  окружности, то  $M$  — центр вписанной в  $ABC$  окружности.

Ограничимся доказательством признака  $I_2$ . Обозначим через  $K$  и  $P$  вторые точки пересечения с описанной около  $ABC$  окружностью прямых  $AM$  и  $BM$  (рис. 6). Из того, что прямая  $AM$  содержит центр описанной около  $MCB$  окружности, следует равенство  $\angle KMB = 90^\circ - \angle MCB$ . (Где-то на луче  $MK$  расположена точка, равноудаленная от  $M$  и  $B$ , из которой отрезок  $BM$  виден под углом  $2 \cdot \angle MCB$ .) Точно так же  $\angle PMA = 90^\circ - \angle MCA$ . Из равенства углов  $KMB$  и  $PMA$  следует, что  $MC$  — биссектриса угла  $C$ . Значит,  $\angle KMB = 90^\circ - \angle MCB = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle ACB = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle MKB = \frac{1}{2}(\angle KMB + \angle KVM)$ , т. е.  $\angle KMB = \angle KVM$  и  $KM = KV$ . Теперь нетрудно сделать вывод, что  $K$  — центр описанной около  $BMC$  окружности,  $CK = KB$  и  $AK$  — биссектриса угла  $A$  и т. д.

Упражнение 2. Докажите самостоятельно свойства 1, 2 и признак  $I_1$ .

В некоторых задачах оказывается полезным следующий признак центра вписанной окружности, обобщающийся на трехмерное (и более) пространство.

Признак  $I_3$ .  $a\vec{IA} + b\vec{IB} + c\vec{IC} = \vec{0}$ , где  $a$ ,  $b$  и  $c$  — соответственно длины сторон  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$ .

Доказательство. Пусть  $I$  — центр вписанной окружности,  $AI$  пересекает  $BC$  в точке  $A_1$ . Имеем

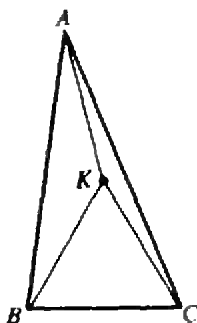


Рис. 4.

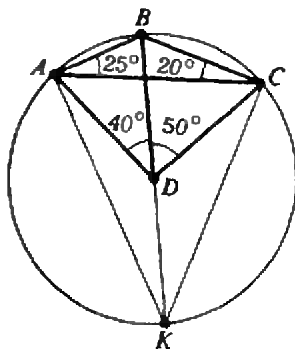


Рис. 5.



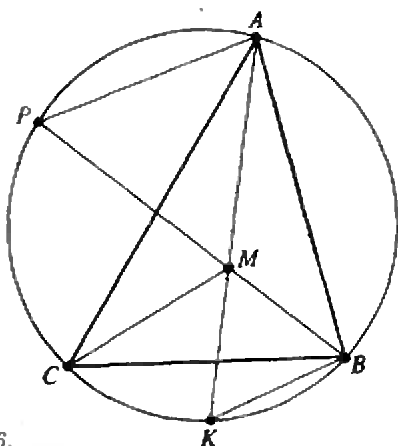


Рис. 6.

$a\vec{IA} + b\vec{IB} + c\vec{IC} = a\vec{IA} + b(\vec{IA}_1 + \vec{A_1B}) + c(\vec{IA}_1 + \vec{A_1C}) = (a\vec{IA} + b\vec{IA}_1 + c\vec{IA}_1) + (b\vec{A_1B} + c\vec{A_1C}) = k\vec{IA}$ . (В последнем равенстве мы воспользовались свойством биссектрисы  $\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{c}{b}$ . Если вы не знакомы с этой теоремой, докажите ее самостоятельно.) Таким образом, рассматриваемая сумма векторов коллинеарна прямой  $AI$ . Аналогично доказывается, что она коллинеарна  $BI$  и  $CI$  и, следовательно, равна нулю.

Упражнение 3. Докажите самостоятельно, что если выполняется признак  $I_3$ , то  $I$  — центр вписанной окружности.

### Точка пересечения высот (ортоцентр)

Известно много различных доказательств теоремы о том, что высоты треугольника пересекаются в одной точке. Мы приведем доказательство, основанное на одной общей идее, уже знакомой вам по доказательству теорем о том, что биссектрисы треугольника, а также серединные перпендикуляры к его сторонам пересекаются в одной точке.

Рассмотрим для удобства остроугольный треугольник  $ABC$ . Заметим, что для всех точек высоты  $AA_1$  отношение расстояний до сторон  $AB$  и  $AC$  постоянно и равно  $\frac{\cos B}{\cos C}$ . (Прямая  $AA_1$  есть геометрическое место точек, отношение расстояний от которых до

прямых  $AB$  и  $AC$  равно  $\frac{\cos B}{\cos C}$ .) То же справедливо и для двух других высот. Обозначим через  $H$  точку пересечения высот  $AA_1$  и  $BB_1$  (рис. 7). Зная отношение расстояний от  $H$  до  $AB$  и  $AC$  ( $\frac{\cos B}{\cos C}$ ) и отношение от  $H$  до  $BA$  и  $BC$  ( $\frac{\cos A}{\cos C}$ ), найдем, что отношение расстояний от  $H$  до  $CA$  и  $CB$  равно  $\frac{\cos A}{\cos B}$  и, следовательно,  $H$  принадлежит третьей высоте.

Случай тупоугольного треугольника сводится к рассмотренному, поскольку (см. рис. 7) для треугольника  $ABH$  точка  $C$  является точкой пересечения высот, опущенных из вершин  $A$  и  $B$ .

При решении задач часто используется следующее свойство.

**Свойство  $H_1$ .** Радиус окружности, проходящей через две вершины треугольника и точку пересечения его высот, равен радиусу описанной около треугольника окружности.

Иногда свойство  $H_1$  удобнее формулировать несколько иначе.

**Свойство  $H'_1$ .** Окружность, проходящая через две вершины треугольника и точку пересечения высот, симметрична окружности, описанной около треугольника относительно соответствующей стороны треугольника.

Упражнение 4. Докажите утверждения  $H_1$  и  $H'_1$ .

В заключение — одна несложная теорема.

**Задача 4.** На плоскости расположены три равные окружности, про-

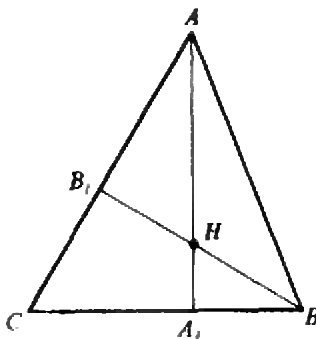


Рис. 7.

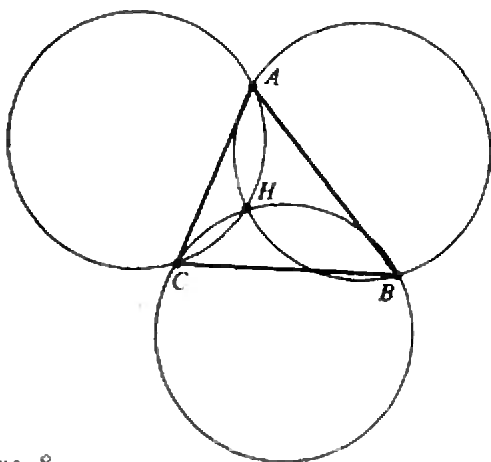


Рис. 8.

ходящие через одну точку. Докажите, что эта точка является ортоцентром треугольника с вершинами во вторых точках попарного пересечения данных окружностей.

**Решение.** Пусть  $H$  — общая точка трех окружностей,  $A$ ,  $B$  и  $C$  — вторые точки их попарных пересечений (рис. 8). Поскольку окружность, проходящая через  $B$ ,  $C$  и  $H$ , симметрична окружности, описанной около  $ABH$ , она содержит точку пересечения высот треугольника  $ABH$ . Точно так же, окружность, проходящая через точки  $A$ ,  $C$ ,  $H$ , содержит точку пересечения высот треугольника  $ABH$ . Следовательно,  $C$  — точка

пересечения высот треугольника  $ABH$ . Это значит,  $H$  — ортоцентр треугольника  $ABC$ .

#### Задачи для самостоятельного решения

1. На плоскости даны точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  такие, что  $\angle ABC = \angle ADC$ ,  $\angle BCD = \angle BAD$ . Обязательно ли четырехугольник  $ABCD$  является параллелограммом?

2. Даны треугольник  $ABC$ . Найдите все такие точки  $M$  плоскости, что  $ABM$ ,  $BCM$  и  $CAM$  — равновеликие треугольники.

3. Докажите, что если отрезки  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  ( $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  лежат соответственно на сторонах  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  треугольника  $ABC$ ) пересекаются в одной точке и делятся в этой точке в одном и том же отношении, то эти отрезки являются медианами треугольника.

4. Внутри квадрата  $ABCD$  взята точка  $M$  такая, что  $\angle MBD = \angle MDC = \alpha$ . Найдите  $\angle MAD$ .

5. Докажите, что если произвольная прямая, проходящая через фиксированную точку внутри данного треугольника, делит его периметр и площадь в равном отношении, то данная фиксированная точка является центром вписанной в треугольник окружности.

6. Дан выпуклый четырехугольник  $ABCD$ . Известны углы:  $\angle BCA = 40^\circ$ ,  $\angle BAC = 50^\circ$ ,  $\angle BDA = 20^\circ$ ,  $\angle BDC = 25^\circ$ . Найдите угол между диагоналями данного четырехугольника.

7. Пусть  $M$  — произвольная точка плоскости,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  — стороны треугольника  $ABC$  ( $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$ ). Докажите, что имеет место неравенство  $aMA^2 + bMB^2 + cMC^2 \geq abc$ . Для какой точки плоскости имеет место равенство?

8. Дан остроугольный треугольник  $ABC$ . Найдите геометрическое место точек  $M$  таких, что  $\angle MAB = \angle MCB$ ,  $\angle MAC = \angle MBC$ .

## Уважаемые читатели!

Сегодня мы еще раз обращаемся к вам с просьбой: пожалуйста, доплатите за годовую подписку на текущий год.

Вспомним предысторию. Разрешение на увеличение объема «Кванта» (о расширении рамок журнала неоднократно просили наши читатели) было получено осенью прошлого года, когда часть подписчиков уже оформила подписку. Перед редакцией встала дилемма — либо подо-

ждать до 1990 года, либо рискнуть и увеличить объем уже в 1989 году. Почему рискнуть? Да потому, что с увеличением объема возрастают расходы на бумагу, типографские работы, авторский гонорар и на отчисления в «Союзпечать». Соответственно должна возрасти и стоимость журнала.

Выразив доверие своим читателям, редакция, однако, не учла возможности срыва доплаты из-за чисто технических причин — отказа некоторых почтовых отделений принимать эту доплату. Судя по жалобам читателей, таких случаев довольно много. И это несмотря на то, что агентство «Союзпечать» неоднократно

рассылало соответствующие директивы (например, телеграмграмма № 1 от 3 апреля 1989 г.).

Редакция нашего журнала и агентство «Союзпечать» приносят читателям «Кванта» искренние извинения за доставленное беспокойство.

Еще раз просим тех читателей, кто подписался по цене 40 коп. за номер, не поленившись и внести соответствующую доплату — по 5 коп. за номер. Доплата производится на отдельном бланке по форме СП-6 с указанием «Доплата — «Квант».

Редакция журнала «Квант»  
Агентство «Союзпечать»

# Есть идея?!

## Физика и техническое творчество

Вою жизнь мы сталкиваемся с физикой. Уже в раннем детстве наше внимание привлекают радуга, замерзшие лужи, морозные узоры на стекле, пар изо рта и т. д. Все это вызывает удивление, восхищение и массу «почему?». Потом приходят бесконечные «как?». Как смастерить скворечник? Как починить велосипед? Как строить дома? Как делают машины? Со временем мы узнаем, что последовательные ответы на «почему?» дают естественные науки, в частности — физика, а на вопросы «как?» отвечает техник.

В технике, как и в физике, одна и та же задача может быть решена разными способами. И часто решение технической задачи подсказывают «чисто» физические законы. Поиск оптимальных принципиально новых решений в технике мы и будем называть техническим творчеством. (В этом смысле построение модели знаменитого ледокола, сборку приемыка из готовых деталей техническим творчеством не считаем.)

Возможно, на этом месте читатель решит: «До технического творчества (в таком определении) я не дорос. Вот закончу школу, вуз — тогда посмотрим». Не торопитесь с заключениями! Многие творческие задачи, которые долгое время были «не по зубам» людям с дипломами, можно решить, оперируя только школьными знаниями. Дело в том, что, по словам академика С. П. Капицы, знания, относящиеся к различным дисциплинам,

лежат в голове человека как бы в разных ящичках. Пользуясь такой аналогией, можно сказать, что успешное решение задачи во многом определяется умением пользоваться знаниями из разных ящичков одновременно. И это умение не приходит само, его надо вырабатывать, добывать. Одним из способов «добычи» является чтение популярных статей и книг о применении физики в технике. Но этого мало. Многие подобные публикации страдают «беспроблемностью» — в них сразу приводится готовый ответ, и научиться по ним применять физику в технике так же трудно, как научиться решать задачи, читая решения. Задачи надо решать самому. Поэтому в заметках рубрики «Есть идея?!» мы будем «разносить» вопросы и ответы. Ряд задач будет предложен для самостоятельного решения. Ни в коем случае не следует начинать поиск решения с хаотического перебора различных вариантов, выдумывать громоздкие приспособления. Прежде всего необходимо уяснить, что надо сделать, а потом уже рассуждать о том, с помощью какого известного вам физического эффекта можно достичь желаемого результата. Задача считается решенной, если найдена базовая идея, т. е. вы нашли тот самый физический эффект.

Поясним сказанное примером задачи с решением. Как-то раз к великому американскому изобретателю Томасу Алве Эдисону пришел молодой человек, желавший поступить

на работу в его лабораторию. Эдисон очень серьезно подходил к приему новых сотрудников: экзаменовал их, расспрашивал об их интересах. Так вот, выяснилось, что молодой человек мечтает изобрести универсальный растворитель, т. е. вещество, способное растворять все на свете. «Где же вы собираетесь хранить свой растворитель?» — удивился Эдисон.

Вас подобное замечание «отрезвило» бы? А вот читатели «Пионерской правды», которая несколько лет назад опубликовала эту задачу, нашли решение:

надо заморозить универсальный растворитель и хранить его в замерзшем состоянии.



Возможны и другие решения «задачи Эдисона». Например, можно попытаться разделить универсальный растворитель на две или несколько неактивных частей, которые при сливании вместе сое-

динились бы в активный универсальный растворитель. Неактивные по отдельности компоненты можно было бы хранить в обычной посуде.

Тот факт, что вещество может пребывать в 3-х агрегатных состояниях (именно это и было базисной идеей читателей «Пионерской правды»), наверняка был известен Эдисону. Но ни он, ни пришедший к нему молодой человек не нашли правильного решения. Видимо, и у великих людей знания лежат в разных ящичках, и великие не всегда могут «открывать» сразу несколько ящичков. Так давайте приобретать это умение. И для начала предлагаем вам решить следующую задачу.

### 1. Задача

#### «Статуя с морского дна»

С океанского лайнера упала за борт древнегреческая статуя, имеющая большую художественную ценность. С помощью подводных телекамер удалось найти то место на большой глубине, где лежит, частично зарывшись в ил, статуя.

Необходимо поднять камеру за довольно короткий срок (по прогнозам надвигается сильный шторм). Снаряжение за такой срок водолазной экспедиции невозможно. На борту лай-

нера имеются тросы и лебедки достаточной грузоподъемности. Оборудование для подведения тросов к статуе может быть сброшено на парашюте с самолета (его можно быстро вызвать с берега). Однако проблема в том, что статуя

слишком деликатный груз: ее могут повредить тросы и крючья. Как быть?

Справившиеся с этой задачей, могут подумать над ее модификацией: что делать, если на лайнере нет грузоподъемных механизмов?

Думайте. И присылайте нам ваши решения. Наиболее интересные из них мы обсудим на страницах журнала.

Ждем ваших писем. На конверте с решением сделайте пометку: «Идея (1)».

*Будущий рубрики А. Л. Лазарян*





## Р-значимы ракета

В будущем году издательство «Наука» в серии «Библиотечка «Квант» выпустит книгу В. Е. Белонучкина «Ньютон, Кеплер и все-все-все...». Очевь советуем нашим читателям — тем, кто интересуется физикой, астрономией, космонавтикой, историей науки, тем, кто любит решать задачи, — не пропустить эту книгу. Она даст вам почувствовать связь времен, связь открытий космической эры с фундаментальными исследованиями классической астрономии, начала которой уходят в глубокую древность, с небесной механикой, созданной великими Ньютоном и Кеплером... Статья, которую мы помещаем сегодня в рубрике «РЗР», — один из авторских вариантов главы этой книги.

## Орбиты

Кандидат физико-математических наук  
В. Е. БЕЛОНУЧКИН

Сущность Вселенной не имеет  
в себе силы, которая могла бы  
противостоять мужеству познания.  
(Г. Гегель)

Все мы знаем, что на вопрос «Ваше представление о счастье?» Карл Маркс ответил: «Борьба». Далеко не все помнят его ответ на вопрос «Ваши любимые герои?». А между тем этот ответ: «Спартак и Кеплер». Спартак и борьба — естественно. Но Кеплер и борьба? Как-то не вяжется представление об открывателе законов движения небесных светил (сейчас его назвали бы астрономом-теоретиком) с образом борца. И все же именно борец.

С кем только ни боролся Кеплер! Даже со своим учителем и благодетелем Тихо Браге. Браге не только дал Кеплеру бесценный материал — результаты своих астрономических наблюдений, из обобщения которых и родились Законы Кеплера. Он приютил Кеплера в тяжелую пору и поддерживал его материально. Вот это больше всего и раздражало гордого Кеплера. Почему Браге не установит ему твердого жалования, а кормит подачками? Не ведал Кеплер, что миллионные средства, подаренные Браге императором Рудольфом, давно испарились, причем ушли они не столько на постройку храма астрономии, сколько на праздники в честь именитых посетителей этого храма; и не для того, чтобы потешить себя и высокородных гостей, давал пиры Браге, а для того, чтобы не разорили, не разграбили город астрономии Ураниборг. И не зря опасался такой судьбы великий астроном. Не успел он, изгнанный все-таки из родной Дании, умереть на чужбине — а прожил он вдали от родины всего четыре года, — как от Ураниборга остались развалины.



Иоганн Кеплер (1571—1630).





года, Марс движется по орбите в том же направлении, что и Земля (что он находится дальше Земли от Солнца, мы знаем). Земля за время  $T=780$  суток совершает чуть больше двух оборотов, а именно —  $k=T/T_0=780/365,25=2,1355$  оборота ( $T=365,25$  суток — земной год). Нетрудно сообразить, что противостояние может произойти только в том случае, если Марс за это время прошел 1,1355 оборота. Значит, искомый период Марса  $T_M=T/1,1355=687$  суток.

(Внимательный читатель, вероятно, заметил не вполне грамотно проведенные вычисления — превышение точности. Каюсь, была у меня «темная мысль»: подогнать под заранее известный ответ. Прошу простить эту слабость, которой в дальнейшем постараюсь избегать.)

**Задача 3.** Во время Великих противостояний расстояние от Земли до Марса минимально и составляет  $r=56 \cdot 10^6$  км. Каково максимальное расстояние от Земли до Марса в противостоянии?

**Замечание.** В задаче 2 мы молча обошлись с орбитами как с круговыми. Теперь это уже не пройдет — ведь в предположении круговых орбит откуда взяться великим противостояниям? Однако эксцентриситет земной орбиты сравнительно мал, и мы по-прежнему будем считать ее круговой. А вот орбита Марса, конечно, уже не окружность.

Данные, которыми мы располагаем: периоды обращения Земли —  $T_0 \approx 365$  суток и Марса —  $T_M \approx 687$  суток и радиус земной орбиты  $R_0 \approx 1,5 \cdot 10^8$  км = 1 а. е. (величину  $R_0$  используют в астрономии в качестве единицы расстояния — это 1 астрономическая единица). Сначала из III закона Кеплера найдем большую ось орбиты Марса:

$$2a_M = 2R_0 (T_M/T_0)^{2/3} \approx 3,05 \text{ а. е.} \approx 4,57 \cdot 10^8 \text{ км.}$$

А дальше достаточно посмотреть на рисунок 3, чтобы понять, что искомое расстояние

$$L = 2a_M - 2R_0 - l \approx 10^9 \text{ км.}$$

(Теперь, наоборот, округление грубовато. Точный ответ, т. е. данные справочника, —  $97,5 \cdot 10^6$  км.)

В этом решении мы полагали, что плоскости орбит Земли и Марса совпадают. Это вполне оправдано, так как в действительности соответствующий угол меньше  $2^\circ$ . Вообще, вся система планет — довольно плоская. Максимальное наклонение к эклиптике (т. е. к плоскости земной орбиты) у орбиты Плутона —  $17^\circ$ , заметно меньше — у Меркурия —  $7^\circ$ , у остальных планет не превышает  $3,5^\circ$ . К кометам это не относится. А именно ими мы сейчас займемся.

### По яйцевидному пути Летит могучая комета.

(К. Бальмонт)

Что путь кометы «яйцевидный» — эллипс — нельзя не согласиться. Насчет другого утверждения поэта — могучая — есть иное мнение: «видимое ничто». Впрочем, каких-то триста лет назад мощь кометы не подвергалась сомнению. Комета насылала засуху, войну, смерть коронованных особ. Правда, уже в XVII веке находились вольнодумцы, смеявшиеся над этими поверьями, но им резонно возразил один из членов фран-



Тихо Браге (1546—1601).

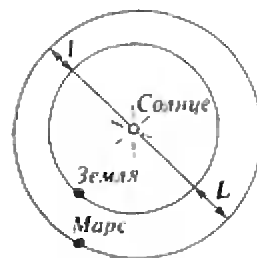


Рис. 3.



цузской королевской семьи: «Вам, господа, хорошо шутить: вы не принцы». А в XV веке папа Каликст III и вовсе растерялся. Комета появилась в начале 1453 года, когда христиане одолевали мусульман, и папа счел ее провозвестником победы. Но в том же году мусульмане взяли Константинополь и окончательно ликвидировали Восточную Римскую империю. Пришлось комету проклясть. Кстати, это была, как выяснилось много позже, самая знаменитая комета — комета Галлея.

Известность этой кометы имеет множество причин. Но главная — именно на ее примере выяснился характер кометных орбит. Ведь даже Кеплер и Галилей считали, что пути комет прямолинейны. Но вот в 1680 году английский астроном Эдмунд Галлей заметил криволинейность пути одной из комет. Конечно, это была именно та комета, которая вскоре получила его имя. Конкретнее, это было появление кометы Галлея 1682 года.

Так какого же года эта комета: 1680-го или 1682-го? Дело в том, что кометы часто имеют двойную датировку: по времени первого наблюдения и по времени прохождения перигелия. Для периодических комет, к которым относится и комета Галлея, чаще употребляется вторая система, поэтому и Галлей в 1680 году видел комету 1682 года, и Каликст III в 1453 году сначала благословил, а затем успел проклясть комету 1456 года.

К счастью, Галлей не ограничился констатацией криволинейности пути кометы. Он догадался, что кометы 1607 и 1531 годов — это та же комета 1682 года, и предсказал ее появление в 1758 году.

**Задача 4.** *Период обращения кометы Галлея  $T_T = 76,7$  года. В перигелии она приближается к Солнцу на расстояние  $r = 0,59$  а. е. Каково максимальное удаление кометы от Солнца?*

Читатель, знакомый с задачей 3, без особого труда самостоятельно справится с этой задачей. (А для контроля он может посмотреть ответ в конце журнала.)

Но что за цифра — 76,7 года? Если уточнить времена прохождения перигелия кометой Галлея в 1456, 1531, 1607, 1682 и, наконец, в 1759 (а не в 1758!) годах, для периода получится такой ряд цифр: 75,2; 76,2; 74,9; 76,5 года. 76,7 больше любого из этих промежутков. Так периодическая это комета или не совсем? В конце концов, можно ли быть уверенным, что это одна и та же комета? Оказывается, все-таки Галлей прав. Надо «только» учесть возмущения, вносимые в движение кометы планетами Солнечной системы. Именно это и проделал замечательный французский математик А. Клеро, когда Комета опаздывала к первому предсказанному свиданию. По расчетам Клеро, который учел влияние Юпитера и Сатурна, комета должна была пройти перигелий не в 1758 году, а с точностью до месяца в апреле 1759 года. И она прошла перигелий 13 марта 1759 года! Но все же откуда 76,7 года?

После открытия Галлеем периодичности кометы, носящей его имя, начались энергичные поиски предыдущих ее появлений. И в конце концов удалось проследить ее историю вплоть до глубокой древности. Оказывается, это она в 1378 году предсказала Мамаево побоище, в 1066 — завоевание Британии норманнами, в 912 — смерть князя Олега, в 66 — разрушение Иерусалима, гибель Помпеи; она в 989 году ознаменовала крещение Руси; ее в 1301 году рисовал великий Джотто. Но больше



Эдмунд Галлей (1656—1742).

всего данных о комете Галлея собрали китайцы. Первое надежное упоминание в китайских хрониках дает дату 25 мая 240 г. до н. э. Впрочем, есть даже дата 7 марта 1057 г. до н. э.! А между этими двумя датами — восемь столетий молчания. В чем дело?

А дело в необузданном человеческом честолюбии. Архистратиг Стратилатович Перехват-Залихватский, если верить Салтыкову-Щедрину, всего лишь «въехав в Глухов на белом коне, сжег гимназию и упразднил науки», в результате чего «история прекратила течение свое», но, по-видимому, только в масштабах города Глухова. «Идеальный правитель» (по мнению председателя Мао) император Цинь Шихуанди решил, что история должна начаться с него. И чтобы не было сомнений, казнил всех обнаруженных им 460 ученых и сжег все исторические книги. А так как в астрономических хрониках упоминались события, имевшие место до воцарения династии Цинь, хроники тоже пошли в костер. Чудом уцелели отдельные книги, отрывки, как тот, в котором упоминается комета 1057 г. до н. э. «Великая» династия Цинь правила Поднебесной империей... 14 лет. Прошли два тысячелетия, и уже в центре Европы возникла «Тысячелетняя империя», где тоже горели костры из книг, преследовали ученых. Ей было отведено историей 12 лет...

Но вернемся к Комете. Если время от 25 мая 240 г. до н. э. до 9 февраля 1986 г. н. э. поделить на 29 оборотов, которые за это время совершила комета Галлея, то получится в среднем как раз 76,7 года на один оборот. А все отклонения — шутки, в основном, Юпитера. Вообще Юпитер, который более чем вдвое превосходит по массе все остальные планеты, вместе взятые, сильно искажает орбиты многих комет. Он даже имеет собственное семейство комет. Семейством Юпитера называют группу комет, чьи афелии лежат неподалеку от орбиты Юпитера. Этот гигант захватил их и не дает им вернуться на родину — на дальние окраины Солнечной системы. С одной из таких комет нас знакомит

**Задача 5. Комета Григга — Скьеллерупа относится к группе Юпитера, ее афелий расположен на расстоянии 5,0 а. е. от Солнца. Период обращения кометы 4,9 года. Может ли эта комета пересечь орбиту Земли?**

Расчет (который мы предоставляем читателю) дает для минимального расстояния кометы от Солнца величину 0,77 а. е., т. е. комета подходит к Солнцу ближе, чем Земля. Так что в принципе комета Григга — Скьеллерупа может пересечь орбиту Земли.

Однако, как уже упоминалось, орбиты комет могут иметь заметный наклон к плоскости эклиптики. В этом случае пересечение проекций орбит планеты и кометы на эту плоскость не гарантирует пересечения самих орбит.

Так, комета Галлея имеет перигелий на расстоянии 0,59 а. е., а между тем минимальное расстояние между ее орбитой и орбитой Земли в настоящее время составляет примерно 0,064 а. е., т. е. около 10 млн. км. Наименьшее расстояние, на котором прошла комета Галлея от Земли, — 0,04 а. е. = 6 млн. км. Это было в 837 году. Прямых свидетельств об этом, конечно, нет, да и быть не может. Более-менее ясно представлять орбиты комет стали только после Галлея.

В наши дни (свидание 1986 года) положение кометы



*Эта глиняная табличка из Древнего Вавилона, рассказывающая о появлении в 164 г. до н. э. в небе Земли светящегося тела, — одна из страниц «биографии» кометы Галлея.*



*Так выглядит комета Галлея сегодня (фото 1986 г.).*

с помощью сверхмощных ЭВМ удалось предсказать с точностью до нескольких угловых секунд. Поиски велись на телескопе с 5-метровым зеркалом. И в телескоп «смотрел» не человек, а сверхчувствительный фотоприемник, способный регистрировать одиночные кванты света. И все же комету заметили лишь за три с небольшим года до прохождения перигелия. Даже вооруженные до зубов современной техникой, мы в состоянии следить за этой, самой изученной, кометой лишь в течение  $1/12$  периода ее обращения. Это время, когда комета проходит ближайший к Солнцу участок орбиты.

Если вы решили задачу 4, то параметры орбиты кометы Галлея вам известны. И тогда достаточно вспомнить II закон Кеплера, чтобы была решена

**Задача 6.** *Какое время тратит комета Галлея на прохождение ближней к Солнцу половины орбиты?* (Кто не помнит площадь эллипса — она равна  $\pi ab$ , где  $a$  и  $b$  — соответственно большая и малая полуоси.)

Этой задачей мы и закончим разговор об орбитах. Ответ к задаче — в конце журнала.

## Ответы, ответы...

(Начало см. на с. 43)

Поверхность же, беспорядочно рассеивающая во все стороны падающие на нее лучи, воспринимается глазом как белая.

Значит, причина белого цвета снега — его раздробленность. Если промежутки между снежинками заполнить водой, снег утрачивает белый цвет и становится прозрачным. Такой опыт нетрудно проделать: если вы насыплете снега в банку и нальете туда воды, снег на ваших глазах из белого делается бесцветным, прозрачным.

**10. Радуга.** Радуга видна лишь тогда, когда высота Солнца над горизонтом не превышает  $42^\circ$ . Между тем высота полуденного Солнца на широте Москвы в день летнего солнцестояния (22 июня) равна  $57,5^\circ$ . Значит, Солнце стояло на небе выше, чем необходимо для возможности видеть радугу.

**11. Свеча в закрытой банке.** Объяснение опыта неправильное. Взамен кислорода, потребляемого при горении, появляется углекислый газ — по одной молекуле углекислого газа на каждую молекулу кислорода. Одинаковое число молекул всегда занимает при равном давлении одинаковый объем (закон Авогадро). Значит, потребление кислорода само по себе не может изменить объема газа, находящегося в банке.

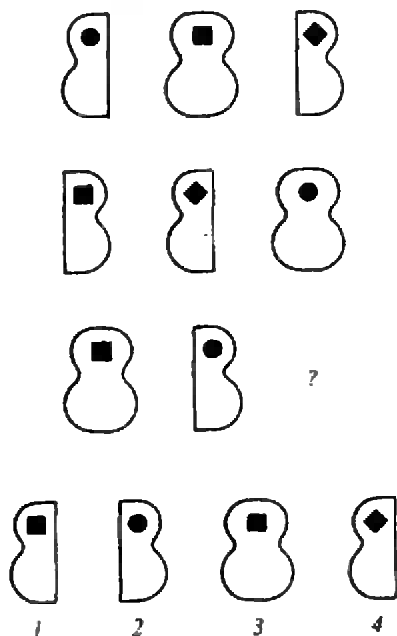
Истинная причина наблюдаемого явления другая — не химическая, а физическая. Воздух внутри банки действительно разрежается при горении свечи, но не вследствие потребления кислорода, а вследствие нагревания. Часть расширяющегося газа удаляется наружу, пока не установится равенство давлений холодного наружного воздуха и теплого внутри банки. Когда свеча из-за недостатка кислорода гаснет, воздух в банке остывает, давление его уменьшается, и избыток наружного давления прижимает крышку.

# Игры и головоломки

## Проверьте свои способности

Так называется вышедшая в 1970 году книга английского психолога Г. Айзенка, содержащая множество психологических тестов. Можно спорить о том, выявляют ли тесты Айзенка способности человека. Но бесспорно, что большинство читателей с удовольствием откликнутся на призыв, содержащийся в названии книги. Мы публикуем один тест Айзенка. На его выполнение дается 30 минут. Точки обозначают количество букв в пропущенном слове. Русский алфавит используется без буквы «ё». Желаем успеха!

1. Выберите нужную фигуру из четырех пронумерованных.



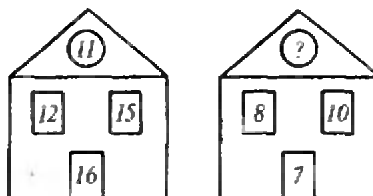
2. Вставьте слово, которое служило бы окончанием первого слова и началом второго.

ОБЫ (...) КА

3. Решите анаграммы и исключите лишнее слово.

ААЛТЕРК  
КОЖАЛ  
ДМОНЧЕА  
ШКААЧ

4. Вставьте недостающее число.



5. Вставьте пропущенное слово.  
БАГОР (РОСА) ТЕСАК  
ГАРАЖ (...) ТАБАК

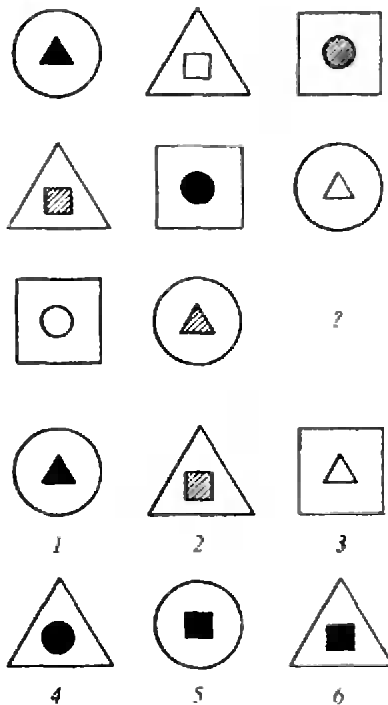
6. Вставьте пропущенное число.  
196 (25) 324  
325 ( ) 137

7. Продолжите ряд чисел.  
18 10 6 4 ?

8. Решите анаграммы и исключите лишнее слово.

НИАВД  
СЕОТТ  
СЛОТ  
ЛЕКСОР

9. Выберите нужную фигуру из шести пронумерованных.



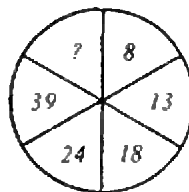
10. Вставьте недостающую букву.

Щ Ц Т П Л ?

11. Вставьте слово, которое служило бы окончанием первого слова и началом второго.

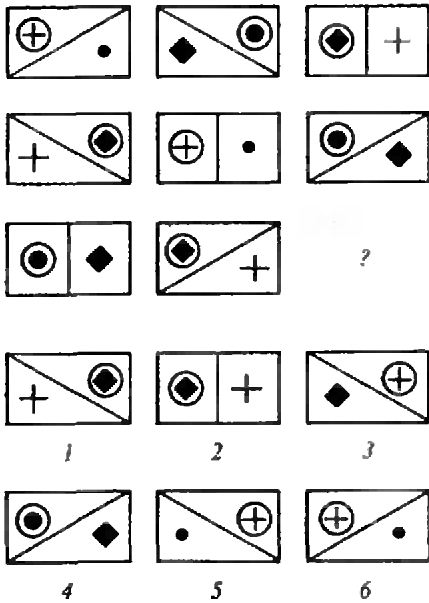
МЕ (...) ОЛАД

12. Вставьте пропущенное число.





13. Выберите нужную фигурку из шести пронумерованных.



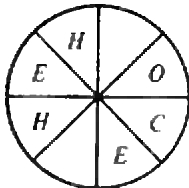
14. Вставьте недостающее число.

4 9 20  
8 5 14  
10 3 ?

15. Вставьте недостающее число.

16 (27) 43  
29 ( ) 56

16. Вставьте недостающие буквы.



17. Вставьте пропущенное число.

6 11 ? 27

18. Вставьте пропущенное число.

12 (56) 16  
17 ( ) 21

19. Вставьте пропущенное слово.

ФЛЯГА (АЛЬТ) ЖЕСТЬ  
КОСЯК (....) МИРАЖ

20. Вставьте слово, которое служило бы окончанием первого слова и началом второго.

ПРИК (...) БЯ

21. Решите анаграммы и исключите лишнее слово.

ЖААРБ  
ТЯХА  
НУССК  
КОДАЛ

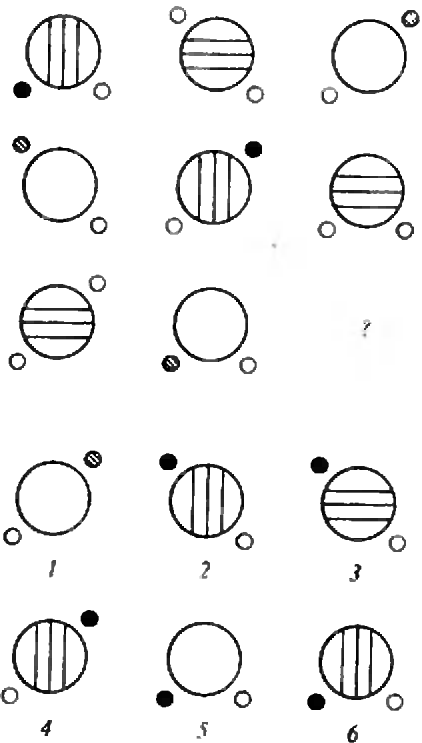
22. Вставьте слово, которое означало бы то же, что и слова, стоящие вне скобок.

РУКА (.....) ГРОЗДЬ

23. Вставьте пропущенную букву.

А Г Ж  
Г З Л  
З М ?

24. Выберите нужную фигурку из шести пронумерованных.



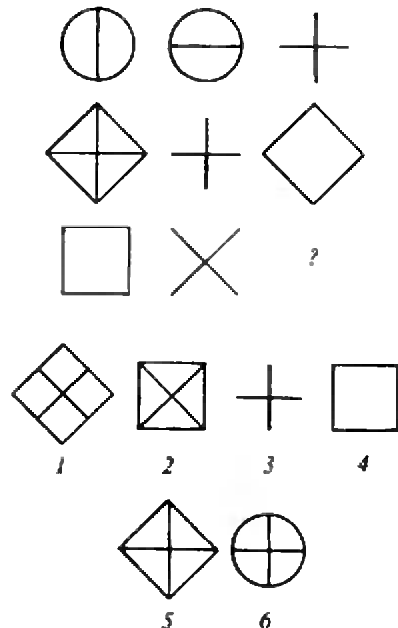
25. Вставьте пропущенное слово.

КНИГА (АИСТ) САЛАТ  
ПУРОГ (....) ОМЛЕТ

26. Вставьте слово, которое означало бы то же, что и слова, стоящие вне скобок.

КАРТОННАЯ ИГРА (....) СТЕРЖЕНЬ  
С РЕЗЬБОЙ

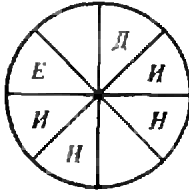
27. Выберите нужную фигуру из шести пронумерованных.



28. Вставьте пропущенное число.

1 8 27 ?

29. Вставьте пропущенные буквы.



30. Вставьте пропущенное слово.  
ЛОТОК (КЛАД) ЛОДКА  
ОЛИМП (....) КАТЕР

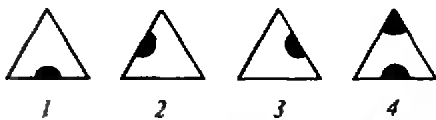
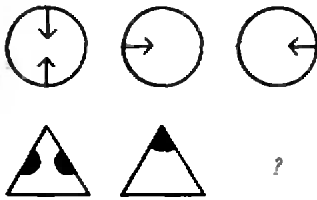
31. Решите анаграммы и исключите лишнее слово.

АТСЕН  
ТИВОНКР  
РАКЫШ  
КООН

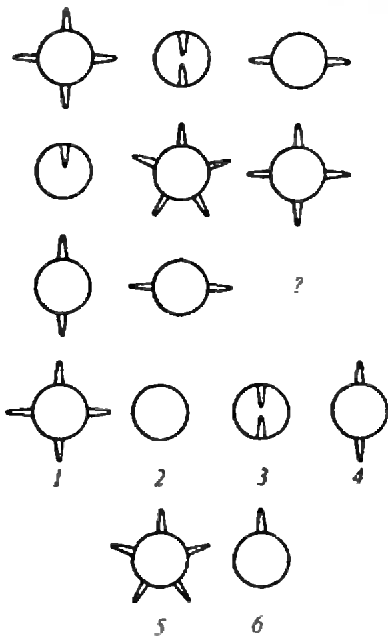
32. Вставьте пропущенную букву и пропущенное число.

1 В 5 ?  
А 3 Д ?

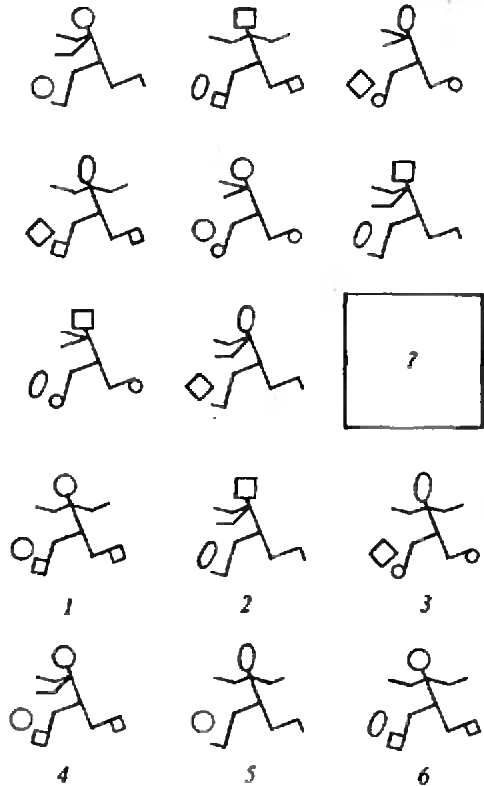
33. Выберите нужную фигуру из четырех пронумерованных.



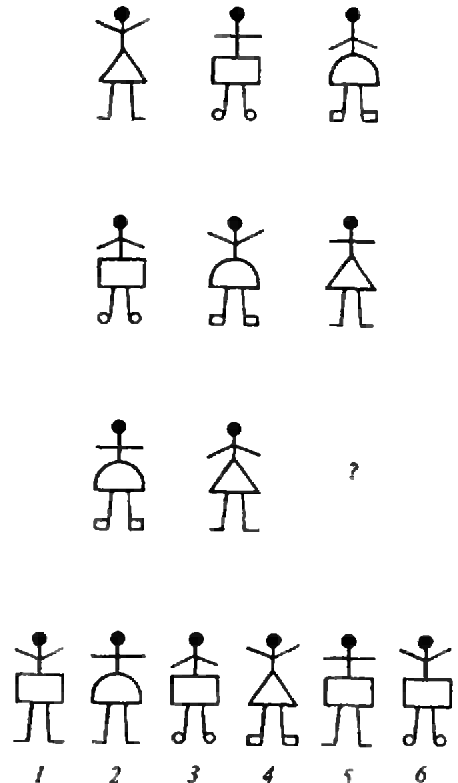
34. Выберите нужную фигуру из шести пронумерованных.



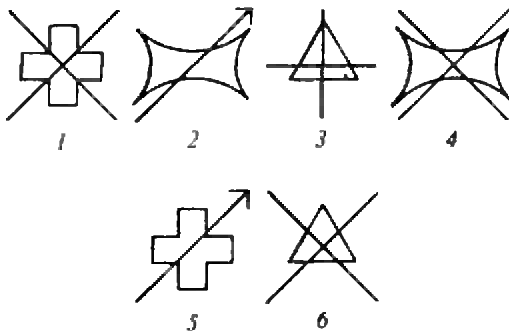
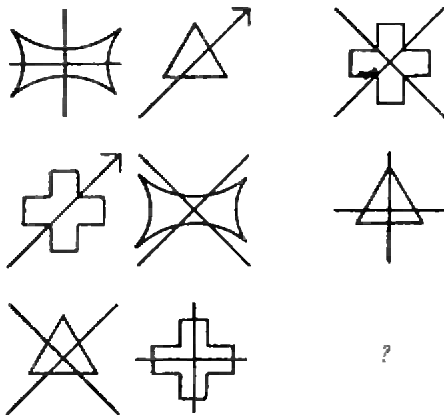
35. Выберите нужную фигурку из шести пронумерованных.



36. Выберите нужную фигурку из шести пронумерованных.

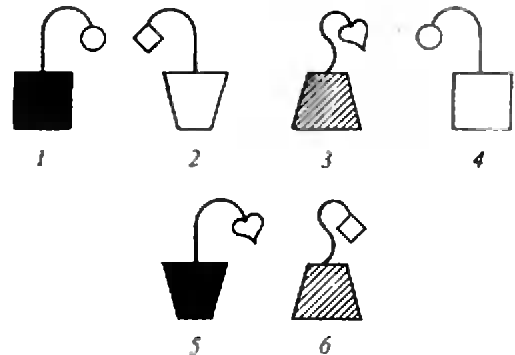
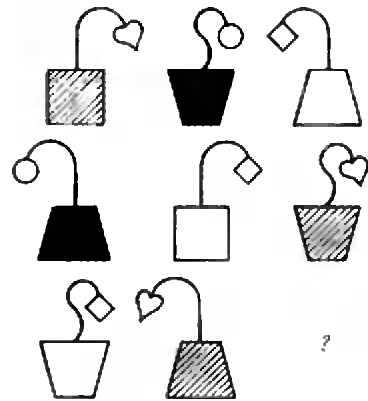


37. Выберите нужную фигуру из шести пронумерованных.



38. Вставьте слово, которое означало бы то же, что и слова, стоящие вне скобок.  
ЗАЛИВ (....) ЧАСТЬ ЛИЦА

39. Выберите нужную фигуру из шести пронумерованных.



40. Вставьте пропущенное слово.  
ШИРОГ (ПОЛЕ) СЛЕЗА  
РЫНОК (....) ОСАДА

## Вариации на тему Евклида

(Начало см. на с. 51)

2, т. е. символами 0 и 1; с этими символами можно производить арифметические операции, например:  $0+1=1$ ,  $1+1=0$ ,  $0 \cdot 1=0$ ,  $1 \cdot 1=1$ . Многочленов данной степени с такими коэффициентами — уже конечное число. Например, многочленов первой степени всего два:  $x$  и  $x+1$ ; второй степени — четыре:  $x^2$ ,  $x^2+x$ ,  $x^2+1$  и  $x^2+x+1$ , и т. д.

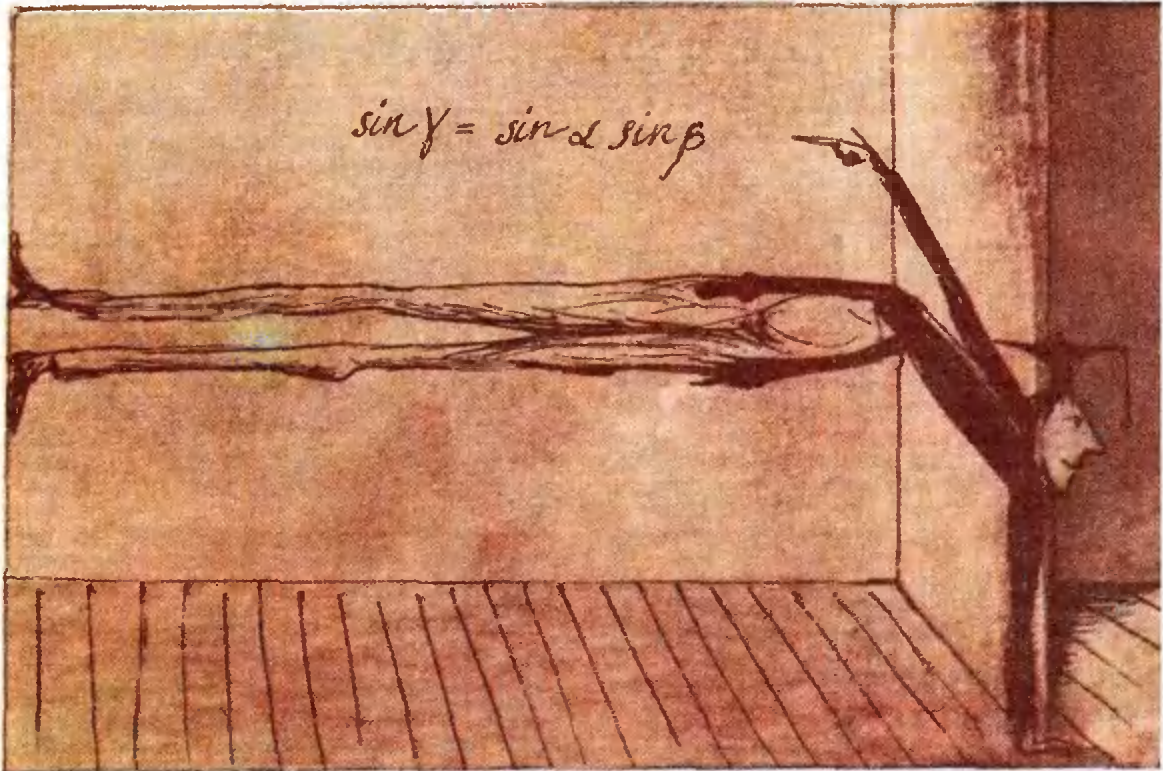
Рассуждение Евклида показывает, что неприводимых

многочленов, коэффициенты которых — вычеты по модулю два, бесконечно много. В силу конечности числа многочленов данной степени, существуют неприводимые многочлены и сколь угодно высокой степени. Возьмем такой многочлен  $p(x)$ . Он будет неприводимым и как многочлен с целыми коэффициентами. Действительно, если  $p(x) = q(x) \cdot r(x)$ , то, заменяя коэффициенты многочленов  $q(x)$  и  $r(x)$  на их вычеты по модулю 2 (т. е. четные числа — на 0, а нечетные — на 1), мы получим разложение на множители  $p(x)$  как многочлена, коэффициенты которого — вычеты по моду-

лю 2. А это невозможно по предположению.

Итак, мы доказали, что степени неприводимых многочленов могут быть сколь угодно велики. В качестве упражнения «на тему Евклида» докажете, что если  $p_1, \dots, p_n$  — простые числа, а  $i_1, \dots, i_n$  — некоторая перестановка их номеров, то среди делителей числа  $E = p_1 p_2 \dots p_n - p_{i_1} \dots p_{i_n}$  найдутся новые простые числа. Например,  $7 = 2 \cdot 5 - 3$ ,  $11 = 7 \cdot 3 - 2 \cdot 5$ ,  $13 = 5 \cdot 11 - 2 \cdot 3 \cdot 7$ ,  $17 = 2 \cdot 7 \cdot 13 - 3 \cdot 5 \cdot 11$ . Может быть, каждое следующее простое число тоже можно представить в таком виде?

В. Г. Ильичев



## Трактат о абитуриентах

### Теорема о трех синусах

И. Г. ГАБОВИЧ

Во многих стереометрических задачах часто приходится определять угол между прямой и плоскостью. Это удобно делать с помощью теоремы о трех синусах, которую вы узнаете, если решите следующую задачу.

1. В одной из граней двугранного угла величиной  $\alpha$  проведена прямая, составляющая с ребром этого угла угол  $\beta$ . Определите угол, который эта прямая образует с другой гранью.

Решение. Пусть  $\angle ABC$  — линейный угол данного двугранного угла, равный  $\alpha$  (рис. 1) и пусть  $\angle ADB = \beta$ . Опустим перпендикуляр  $AC$  на другую грань угла; тогда  $\angle ADC$  — искомый. Обозначим  $\angle ADC$  через  $\gamma$  и по-

ложим  $AD = x$ . Треугольник  $ABD$  — прямоугольный, поэтому  $AB = x \sin \beta$ . Треугольник  $ABC$  тоже прямоугольный, поэтому  $AC = AB \sin \alpha = x \sin \alpha \sin \beta$ . Наконец, из треугольника  $ADC$  находим, что  $AC = x \sin \gamma$ . Итак,

$$\sin \gamma = \sin \alpha \sin \beta.$$

Это и есть теорема о трех синусах, которой посвящена эта статья. Вот как она применяется в решении задач.

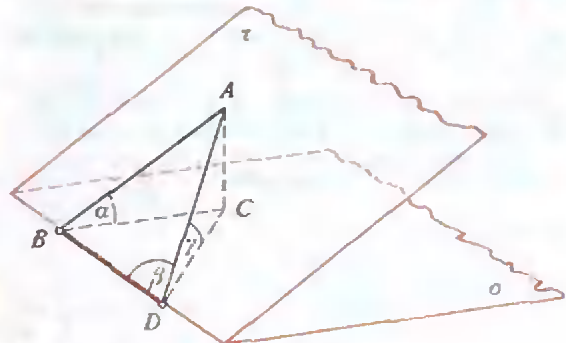


Рис. 1.

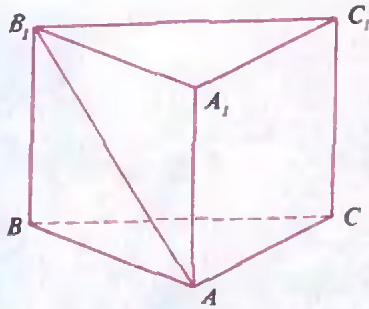


Рис. 2.

2. В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$  основание равно высоте. Найдите угол между диагональю  $AB_1$  и плоскостью  $AA_1C_1C$ .

Решение. Двугранный угол при ребре  $AA_1$  равен  $\frac{\pi}{3}$  (рис. 2). Диагональ  $AB_1$  составляет с ребром  $AA_1$  угол, равный  $\frac{\pi}{4}$ . Пусть  $\gamma$  — величина искомого угла. Тогда по теореме о трех синусах

$$\sin \gamma = \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

Итак,  $\gamma = \arcsin \frac{\sqrt{6}}{4}$ .

Вот задача посложнее.

3. Угол между плоскостью квадрата  $ABCD$  и некоторой плоскостью  $\tau$  равен  $\alpha$ , а угол между стороной  $AB$  и той же плоскостью равен  $\beta$ . Найдите угол между стороной  $AD$  и плоскостью  $\tau$ .

Решение. Будем считать, что вершина  $A$  квадрата лежит на ребре рассматриваемого двугранного угла — см. рисунок 3. Углы  $BFB_1$  и  $DED_1$  — линейные углы этого двугранного угла:  $\angle BFB_1 = \angle DED_1 = \alpha$ . Отрезки  $AB_1$  и  $AD_1$  — проекции сторон  $AB$  и  $AD$  на плоскость  $\tau$ . Согласно условию,  $\angle BAB_1 = \beta$ .

Пусть  $\angle BAF = \varphi$  и  $\angle DAD_1 = \gamma$ . По теореме о трех синусах  $\sin \beta = \sin \alpha \sin \varphi$ , откуда  $\sin \varphi = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha}} = \\ &= \frac{1}{\sin \alpha} \sqrt{\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sin \alpha} \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2} - \frac{1 - \cos 2\beta}{2}} = \\ &= \frac{1}{\sin \alpha} \sqrt{\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)}. \end{aligned}$$

Очевидно, что  $\angle DAE = 90^\circ - \varphi$ . Поэтому из теоремы о трех синусах следует

$$\begin{aligned} \sin \gamma &= \sin \alpha \sin(90^\circ - \varphi) = \\ &= \sin \alpha \cos \varphi = \\ &= \sqrt{\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)}. \end{aligned}$$

Итак,

$$\gamma = \arcsin \sqrt{\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)}.$$

Следующая задача предлагалась на вступительном экзамене в МФТИ.

5. Стороны  $AB$  и  $AC$  равностороннего треугольника расположены соответственно в гранях  $P$  и  $Q$  острого двугранного угла  $\varphi$ . Сторона  $AB$  образует с ребром двугранного угла острый угол  $\alpha$ . Найдите величину угла между плоскостью  $ABC$  и гранью  $Q$ .

Решение. Сделаем чертеж — рисунок 4. Вершина  $A$  равностороннего треугольника принадлежит ребру  $MN$ , стороны  $AB$  и  $AC$  лежат в гранях  $P$  и  $Q$ ; согласно условию,  $\angle BAM = \alpha$ . Проведем  $BO \perp Q$  и соединим точки  $O$  и  $A$ . Обозначим  $\angle BAO$  через  $\varphi$ , а через  $\omega$  — обозначим искомый угол, который плоскость  $ABC$  образует с  $Q$ .

Применив дважды теорему о трех синусах, получаем

$$\sin \gamma = \sin \varphi \sin \alpha$$

и

$$\sin \gamma = \sin \omega \sin \frac{\pi}{3}.$$

Итак,

$$\sin \omega = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \varphi \sin \alpha$$

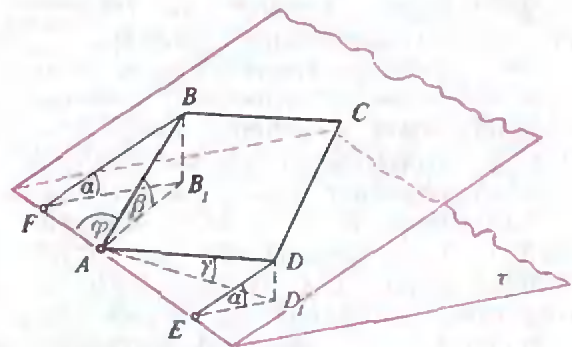


Рис. 3.



и

$$\omega = \arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \sin \varphi \sin \alpha\right).$$

Надеюсь, что теорема о трех синусах окажется полезной вам при подготовке к вступительным экзаменам. В заключение — еще несколько задач.

1. Катет равнобедренного прямоугольного треугольника наклонен к плоскости  $\alpha$ , проходящей через гипотенузу, под углом  $30^\circ$ . Докажите, что угол между плоскостью  $\alpha$  и плоскостью треугольника равен  $45^\circ$ .
2. Сторона  $AB$  ромба  $ABCD$  с тупым углом  $120^\circ$  лежит в некоторой плоскости  $\tau$ , составляющей с плоскостью ромба угол  $45^\circ$ . Площадь ромба равна  $72 - \sqrt{3}$  см<sup>2</sup>. Определите расстояние от стороны  $CD$  до плоскости  $\tau$  и угол, который составляет большая диагональ ромба с этой же плоскостью.
3. Прямая  $AB$  параллельна плоскости  $\tau$ . Прямая  $CD$  пересекает прямую  $AB$  под углом  $\alpha$  и образует с плоскостью  $\tau$  угол  $\varphi$ . Определите угол между плоскостью  $\tau$  и плоскостью, в которой лежат прямые  $AB$  и  $CD$ .

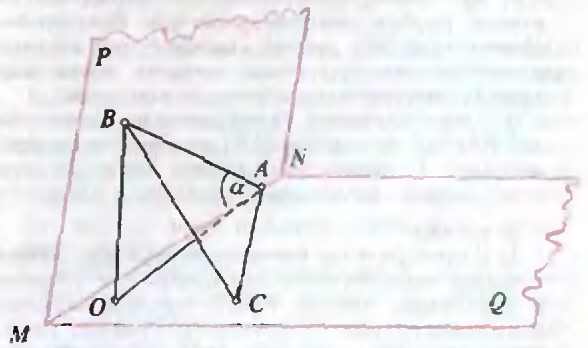


Рис. 4.

4. В прямоугольном треугольнике через биссектрису прямого угла проведена плоскость, которая составляет с плоскостью треугольника угол  $\alpha$ . Какие углы эта плоскость составляет с катетами треугольника?
5. Найдите объем правильной треугольной пирамиды, сторона основания которой равна  $a$  и образует с боковой гранью угол  $\alpha$ .

## Олимпиады

### Задачи LII Московской математической олимпиады

#### 7 класс

1. Квадрат расчерчен на 16 равных клеток. Каждую из букв  $A, B, C, D$  расставьте в этих клетках по четыре раза таким образом, чтобы на любой горизонтали, любой вертикали и двух больших диагоналях не было одинаковых букв.
2. Проведя наименьшее количество линий (окружностей и прямых с помощью циркуля и линейки), постройте прямую, проходящую через данную точку параллельно заданной прямой.
3. В темной комнате на полке в беспорядке лежат 4 пары носков двух разных размеров и двух разных цветов. Какое наименьшее число носков необходимо, не выходя из комнаты, переложить с полки в чемодан, чтобы в нем оказались две пары различного размера и цвета?
4. Турист выехал из турбазы на байдарке в 10 часов 15 минут с обязательством вернуться обратно не позднее 13 часов того же дня. Известно, что скорость реки 1,4 км/ч, скорость байдарки в стоячей воде 3 км/ч. На какое максимальное расстояние турист сможет отехать от турбазы, если через каждые 30 минут гребли он 15 минут отдыхает, не прича-

ливая к берегу, и может повернуть назад только после отдыха?

5. Найдите все натуральные числа  $x$ , удовлетворяющие условиям: произведение цифр числа  $x$  равно  $44 \cdot x - 86868$ , а сумма цифр является кубом натурального числа.

#### 8 класс

1. Решите уравнение  $(x^2 + x)^2 + \sqrt{x^2 - 1} = 0$ .
2. Часть клеток бесконечной клетчатой бумаги покрашена в красный цвет, остальные — в белый (не обязательно в шахматном порядке). По красным клеткам прыгает кузнечик, по белым — блоха, причем каждый прыжок может быть сделан на любое расстояние по вертикали или горизонтали. Докажите, что кузнечик и блоха могут оказаться рядом, сделав в общей сложности (в сумме) не более трех прыжков.
3. Проведя наименьшее количество линий (окружностей и прямых с помощью циркуля и линейки), постройте перпендикуляр к данной прямой, проходящей через данную точку а) вне этой прямой; б) на ней.
4. Подмножество  $X$  множества «двузначных» чисел  $00, 01, \dots, 98, 99$  таково, что в любой бесконечной последовательности цифр найдутся две цифры, стоящие рядом и образующие число из  $X$ . Какое наименьшее количество чисел может содержаться в  $X$ ?

5. Докажите, что пионерский отряд всегда можно разбить на две команды так, чтобы общее число пар друзей, оказавшихся в одной и той же команде, было меньше числа пар друзей, оказавшихся в разных командах.

6. Все значения квадратного трехчлена  $ax^2 + bx + c$  на отрезке  $[0,1]$  по модулю не превосходят 1. Какое наибольшее значение при этом может иметь величина  $|a| + |b| + |c|$ ?

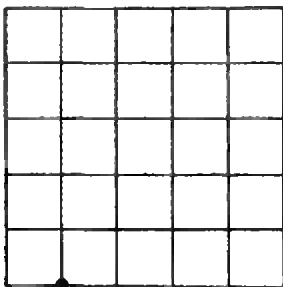
**9 класс**

1. В пространстве имеются четыре различные прямые, окрашенные в два цвета: две красные и две синие, причем любая красная прямая перпендикулярна любой синей прямой. Докажите, что либо красные, либо синие прямые параллельны.

2. В треугольнике  $ABC$  на сторонах  $AB$ ,  $BC$  и  $AC$  взяты соответственно точки  $M$ ,  $K$  и  $L$  так, что прямая  $MK$  параллельна прямой  $AC$  и  $ML$  параллельна  $BC$ . При этом отрезок  $BL$  пересекает отрезок  $MK$  в точке  $P$ , а  $AK$  пересекает  $ML$  в точке  $Q$ . Докажите, что отрезки  $PQ$  и  $AB$  параллельны.

3. Известно, что числа  $A_1, A_2, \dots$  и  $B_1, B_2, \dots$  образуют геометрические прогрессии. Можно ли, зная лишь значения  $A_1 + B_1, A_2 + B_2, A_3 + B_3$  и  $A_4 + B_4$ , определить  $A_5 + B_5$ ?

4. Улицы некоторого города на плане представляются в виде квадрата, расчерченного на 25 равных клеток со стороной 1. В отмеченной на рисунке точке находится снегоуборочная машина. Найдите длину кратчайшего маршрута объезда всех улиц, чтобы в конце работы машина вернулась в исходную точку.



5. Найдите все положительные числа  $A_1, A_2, \dots, A_{10}$ , удовлетворяющие при всех  $k=1, 2, \dots, 10$  условию  $(A_1 + \dots + A_k)(A_k + \dots + A_{10}) = 1$ .

**10 класс**

1. Решите уравнение

$$\lg(x-2) = 2x - x^2 + 5.$$

2. Существует ли функция, график которой на координатной плоскости имеет общую точку с любой прямой?

3. Можно ли расставить на листе клетчатой бумаги крестики и нолики так, чтобы ни на одной горизонтали, вертикали и диагонали нельзя было встретить три одинаковых знака подряд?

4. Даны  $n$  различных натуральных чисел. Докажите, что некоторая бесконечная арифметическая прогрессия, первый член которой не больше ее разности, содержит ровно 3 или 4 данных числа, если а)  $n=5$ , б)  $n=1989$ .

5. Вычислите с точностью до 2 наименьшую суммарную длину разрезов, которые необходимо сделать, чтобы перекроить единичный квадрат в прямоугольник с диагональю, равной 100.

6. На ребрах произвольного тетраэдра выбрано по точке. Через каждую тройку точек, лежащих на ребрах с общей вершиной, проведена плоскость. Докажите, что если три из четырех проведенных плоскостей касаются вписанного в тетраэдр шара, то и четвертая плоскость также его касается.

*Публикацию подготовили  
И. Н. Сергеев, С. Б. Гашков*

## Избранные задачи Московской городской олимпиады по физике

**8 класс**

1. С ледяной горки с углом  $\alpha$  без начальной скорости съезжают санки. Средняя треть длины горки посыпана песком и имеет коэффициент трения  $\mu$ . При каких значениях  $\mu$  санки доедут до конца горки? Чистый лед считать абсолютно гладким.

2. По шоссе в один ряд с одинаковыми интервалами и скоростями движутся большие грузовики. В каком месте у пешехода больше времени на переход шоссе: у перекрестка, где скорость грузовиков мала (хотя все равно гораздо больше, чем у пешехода), или вдали от него, где скорость в несколько раз выше? Светофора нет!

3. Шарик массой  $m$  под действием силы тяжести падает в жидкости с постоянной скоростью  $v$ . Сила сопротивления жидкости движению шарика пропорциональна квадрату скорости. К шарiku дополнительно прикладывается горизонтально направленная сила  $f$ . Какой станет вертикальная составляющая скорости шарика?

4. Муха, пролетая параллельно поверхности стола со скоростью  $v$  на высоте  $H$ , заметила в некоторый момент времени точно под собой каплю меда. При помощи крыльев муха может развить в любом направлении ускорение, не превышающее  $a$ . За какое минимальное время муха сможет долететь до капли меда? Сила тяжести отсутствует (допустим, дело происходит в космосе).

**9 класс**

1. Человек стоит у стены так, что его спина и пятки касаются этой стены. Может ли он, не теряя равновесия, наклониться, чтобы завязать шнурок на ботинке, не отрывая подошв от пола?

2. На дне океана с исследовательскими целями произведен подводный взрыв. Гидрофон (приемник звука), установленный на дне на некотором расстоянии от места взрыва,

зарегистрировал последовательность из нескольких звуковых сигналов. Промежуток времени между первым и вторым сигналами составил  $t_1=1$  с, между первым и третьим —  $t_2=3$  с. На каком расстоянии от гидрофона произошел взрыв?

3. На горизонтальную поверхность льда при температуре  $t_1=0^\circ\text{C}$  кладут однокопеечную монету, нагретую до температуры  $t_2=50^\circ\text{C}$ . Монета проплавляет лед и опускается в образовавшуюся лунку. Погрузится ли она в лед на всю свою толщину? Удельная теплоемкость материала монеты  $c_m=380$  Дж/(кг·К), плотность его  $\rho_m=8,9$  г/см<sup>3</sup>, удельная теплота плавления льда  $\lambda=3,3 \times 10^5$  Дж/кг, плотность льда  $\rho=0,9$  г/см<sup>3</sup>.

4. На поверхность термостата одновременно ставят рядом два однородных куба, сделанных из одинакового материала и находящихся при одинаковой температуре  $t_0$ , отличной от температуры термостата  $t_1$ . Длина ребра у одного из кубов в два раза больше, чем у другого. Через время  $t$  температура в центре малого куба стала  $t_2$ . Через какое время (от начального момента) такая же температура будет в центре большого куба? Потери тепла пренебречь.

5. В герметическом цилиндре длиной  $l=1$  м и сечением  $S=10$  см<sup>2</sup> находится тонкий поршень массой  $M=200$  г, который может перемещаться вдоль цилиндра без трения. Первоначально ось цилиндра горизонтальна, а поршень находится посередине цилиндра. По обе стороны от поршня вводят одинаковое количество  $m=0,4$  г воды и ее паров при атмосферном давлении. Затем цилиндр переводят в вертикальное положение. На сколько при этом смещается поршень, если во всем цилиндре поддерживается температура  $t=100^\circ\text{C}$ ? Как изменится ответ, если  $m=0,8$  г?

6. Оцените массу спирали электрической лампочки мощностью  $P=100$  Вт, включенной в сеть переменного тока с частотой  $f=50$  Гц, если известно, что температура спирали колеблется от  $T_1=2500$  К до  $T_2=2800$  К с частотой 100 Гц. Удельная теплоемкость вольфрама  $c=132$  Дж/(кг·К).

7. Плоская металлическая шайба массой  $m$  и площадью  $S$  может свободно перемещаться между обкладками плоского конденсатора, оставаясь параллельной им. Сила тяжести отсутствует. В начальный момент времени шайба касается одной из обкладок. К конденсатору подключают источник постоянного напряжения  $U$ . Найдите зависимость тока в цепи от времени, если расстояние между обкладками конденсатора  $d$ . Удары шайбы об обкладки считать неупругими.

#### 10 класс

1. В банке 1 находится 0,5 л горячей воды, а в банке 2 — 1 л холодной воды. Сначала некоторый объем воды из банки 1 переливают в банку 2, и содержимое перемешивают. Затем такой же объем воды из банки 2 переливают в банку 1 и тоже перемешивают. В результате температура воды в банке 1 уменьшилась на  $2^\circ\text{C}$ . Как изменилась температура воды в банке 2?

Теплоемкостью банок и теплообменом с окружающей средой пренебречь.

2. На горизонтальную пластину насыпано немного мелкого песка. Пластина совершает гармонические колебания в вертикальном направлении с частотой  $f=1000$  Гц. При этом песчинки подпрыгивают на высоту  $h=5$  мм относительно среднего положения пластины. Считая удары песчинок о пластину абсолютно неупругими, найдите амплитуду колебаний пластины.

3. Вы смотрите с расстояния  $L=2$  м на свое отражение в елочном шарике диаметром  $d=10$  см. На каком расстоянии от вас должен стоять ваш двойник, чтобы вы видели его таким же маленьким, как ваше отражение в шарике?

4. В одном из проектов «системы противоракетной обороны с элементами космического базирования» предлагается вывести на околоземную орбиту химический лазер, создающий инфракрасный луч мощностью  $P=25\,000$  кВт. Один фотон (квант) такого излучения имеет энергию  $E_0=7,5 \cdot 10^{-20}$  Дж и импульс  $p_0=2,5 \cdot 10^{-28}$  кг·м/с. Найдите силу отдачи, действующую на такой лазер при его работе.

Публикацию подготовили  
А. И. Буздин, С. С. Кротов

## Олимпиада по физике Ленинградского политехнического института

Ниже приводятся задачи, предлагавшиеся в этом году на заключительном туре институтской физической олимпиады для старшеклассников.

1. На поршень шприца, расположенного горизонтально, давят с силой  $F$ . Сколько воды выходит из шприца в 1 секунду, если диаметр поршня  $D$ ? Трением можно пренебречь.

2. Металлический шар радиусом  $R$  несёт заряд  $Q$ . Шар покрыт слоем однородного диэлектрика толщиной  $L$ . Диэлектрическая проницаемость слоя  $\epsilon$ . Определите работу перемещения точечного заряда  $q$  от поверхности шара в точку, находящуюся в вакууме на расстоянии  $r > R+L$ .

3. В вогнутое зеркало, имеющее форму полусферы радиусом  $R=110$  см, налит тонкий слой прозрачной жидкости. Найдите показатель преломления жидкости, если известно, что при некотором положении точечного источника света данная оптическая система дает два действительных изображения, одно из которых совпадает с самим источником, а другое отстоит от него на  $l=60$  см.

4. Груз массой  $m$  падает с высоты  $H$  на чашу массой  $M$ , подвешенную на пружине, жест-

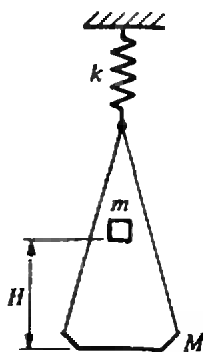


Рис. 1.

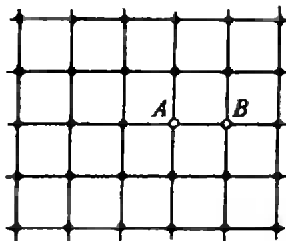


Рис. 2.

кость которой  $k$  (рис. 1). Определите амплитуду колебаний, полагая удар абсолютно неупругим (массой пружины пренебречь).

5. Температура поверхностного слоя Солнца  $T \approx 6000$  К. Почему с поверхности Солнца не улетают атомы водорода (масса Солнца  $M \approx 2 \cdot 10^{30}$  кг, радиус Солнца  $R \approx 7 \cdot 10^8$  м)?

6. Определите работу по переносу тела массой  $m$  в отсутствие сил сопротивления с одной планеты на другую. Массы и радиусы планет известны. (Скорость переноса считать постоянной и значительно меньшей скорости света.)

7. Дана бесконечная плоская проводящая сеть с квадратными ячейками (рис. 2). Сопротивление каждого прямого проводника, соединяющего два ближайших узла сети, равно  $R$ . Определите сопротивление между точками  $A$  и  $B$ .

8. Используя классические формулы для кинетической и потенциальной энергии электронно-протонной системы и квантовый постулат Бора, получите выражение для энергии уровней в атоме водорода.

9. В боковой стенке сосуда, наполненного жидкостью с показателем преломления  $n$ , проделано небольшое отверстие радиусом  $r$ . По оси отверстия из сосуда выходит горизонтальный луч света. До какого уровня над отверстием должна вытечь жидкость, чтобы луч вышел из струи, ни разу не испытав полного отражения?

*Публикацию подготовили  
А. Я. Николаич,  
В. А. Опарин,  
В. Н. Романов*

## Всесоюзная заочная физико- математическая олимпиада МГТУ им. Н. Э. Баумана

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана проводит в 1989/90 учебном году вторую Всесоюзную заочную физико-математическую олимпиаду (с техническим приложением) для учащихся средних школ, ПТУ и техникумов.

Олимпиада проводится в два тура. Условия задач первого тура публикуются ниже. Условия задач второго тура будут рассылаться участникам олимпиады, допущенным ко второму туру по результатам первого.

Решение задач первого тура необходимо выслать до 15 декабря 1989 года. Все решения оформите в одной школьной тетради. На внешнюю сторону обложки тетради наклейте лист бумаги с указанием подробного домашнего адреса (с почтовым индексом), фамилии, имени, отчества и места учебы. На внутреннюю сторону обложки наклейте справку с места учебы с указанием класса.

Тетрадь с решениями положите в большой конверт и отправьте простой бандеролью по адресу: 107005 Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, МГТУ им. Н. Э. Баумана, «Олимпиада-89/90».

**Задачи первого тура**

1. Сколько корней на отрезке  $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$  имеет уравнение

$$4\sqrt{2} |x|(x^2 - 1)(2x^4 - 4x^2 + 1) = 1?$$

2. Сравните  $99^1$  и  $50^{99}$ .

3. Ребро основания правильной четырехугольной призмы  $2a$ , а высота  $a(1 + \sqrt{3})$ . Проведена сфера, проходящая через все вершины нижнего основания призмы и касающаяся его верхнего основания. Найдите площадь части поверхности призмы, находящейся внутри сферы.

4. Летательный аппарат с оптическим устройством на борту движется равномерно над поверхностью земли на высоте 800 м, вращаясь вокруг продольной оси со скоростью 360 об/мин. Оптическое устройство автоматически делает снимок каждый раз в тот момент, когда его объектив занимает наименьшее положение. Определите угол съемки, необходимый для того, чтобы при фотографировании не перекрывались соседние кадры.

5. Одноатомный газ находится в вертикально расположенном цилиндре под поршнем, способным без трения перемещаться в вертикальном направлении. Площадь поперечного сечения цилиндра  $S$ , объем  $V$ . Цилиндр через маленькое отверстие соединяют с теплоизолированной емкостью объемом  $V$ , газ в которой отсутствует. На каком уровне остановится поршень после завершения процесса перетекания газа?

6. Двое несут тяжелое бревно. Третий становится впереди первого и пытается помочь. Будет ли несущим легче?



## Олимпиады по информатике в Киргизии

История олимпиад по информатике в г. Фрунзе начинается с 1985 года, когда была проведена первая такая олимпиада. С 1987 года проводятся республиканские олимпиады.

Олимпиады проходят по группам: I — 6—9 классы, II — 10 класс, а также ПТУ с теоретическим (Т) и компьютерным (К) турами. Несколько задач предыдущих лет опубликованы в журнале «Информатика и образование», 1987, № 6 (с. 97—98). Здесь приводится ряд задач олимпиад различных уровней последних лет (3 — зональная, Ф — городская, Р — республиканская).

1 (Ф — 88, II, Т). Заданы три тройки натуральных чисел  $K_1 \geq M_1 \geq T_1$ ,  $K_2 \geq M_2 \geq T_2$ ,  $K_3 \geq M_3 \geq T_3$ , каждая из которых определяет прямоугольный параллелепипед. Написать алгоритм, который определяет, можно ли составить из этих параллелепипедов куб.

2 (Р — 88, I, Т). Алгоритм обрабатывает некоторые сочетания букв В, П, М. Алгоритм переводит слово ПВВВМВ в слово ПВ, МВМВПВМВ в МВМВ, МВПВПВМВПВ в ПВ, ПВПВ в ППВ, МВПВПВПВ в ППВ.

Для некоторых слов, например ППВ, МВМП, ВВ, ПВМПВ, алгоритм дает сообщение «ошибка».

а) Опишите такой алгоритм.

б) Какой смысл можно придать такому алгоритму?

3 (Р — 88, ПТУ, Т). Ацетиленовый резак установлен в правом верхнем углу металлического листа размером  $100 \times 100$  см. Резак движется на А см вниз, В см влево и С см вниз. На сколько частей будет разрезан лист и как они будут выглядеть?

4 (3 — 89, I, Т). а) Что делает алгоритм, реализованный приведенной ниже программой на языке Бейсик? б) Как можно его упростить? А, В, С — целые числа.

```
10 INPUT B
20 A=1
32 IF B>A+8 THEN 60
35 C=B-1
40 IF C<A+7 THEN 60
55 PRINT A, B, C, V
56 STOP
60 PRINT «ЖОК»
75 STOP: END
```

5 (Ф — 89, II, К). Будем называть два числа близкими, если их разность меньше 10. Написать и отладить программу, которая запрашивает ввод числа до тех пор, пока все уже введенные числа близки друг к другу (разность между любыми двумя из них меньше 10).

6 (Р — 89, I, Т). Посередине клетчатого листа бумаги нарисована замкнутая несамопересекающаяся ломаная линия, звенья которой идут по сторонам клеток. Муравей находится в середине одной из клеток. Муравей может переходить на одну из четырех сосед-

них клеток, отмечать клетки, где он уже был. Муравей видит, пересек ли он линию и вышел ли он на край листа.

Написать алгоритм, который определяет, где находился сначала муравей: внутри области, ограниченной линией, или снаружи нее.

7 (Р — 89, I—II, Т). Киргизский алфавит отличается от русского добавлением букв Н, (носовое Н), Ө, У (смягченные О, У).

В следующих словах буква Л читается твердо:

КОЛ, АЛА, БЫЛТЫР, ВУЛ, БАЛЫК, ОЙЛО, АМАЛКӨЙ, БОЕЛГОН, ПАЛОО, КУЛУН, УЛАН, АЙЫЛ, МАЛ, КОЮЛГАН.

В следующих словах буква Л читается мягко (как в русских словах соль, люк):

БИЛИМ, КӨЛ, МУГАЛИМ, ЭЛ, КЕЛ, БӨЛ, ЭЛИК, ВЕЛЕК, ЭЛҮҮ, ГҮЛ, СЕЛКИНЧЕК, ГҮЛЖАН.

Написать алгоритм, который по заданному киргизскому слову, содержащему одну букву Л, определяет, твердо или мягко читается эта буква.

8 (Р — 89, I, Т). а) Что делает алгоритм, реализованный следующей программой на языке Бейсик? Какой смысл можно придать этому алгоритму? б) Как можно его упростить?

```
10 X=0:Y=3
20 IF X*X-3*X<=0 THEN PRINT X, Y
30 IF X*X-3*X<0 THEN 56
40 Y=Y-1
50 IF Y>=0 THEN 20
56 X=X+1:Y=X:GOTO 20
```

Г. М. Кененбаева, П. С. Панков

Ответы, указания, решения

Муравей на консервной банке

Длина пути  $ACDB$  равна длине пути  $AC'DB$  — см. рис. 1. А этот путь длиннее, чем путь  $AC'B$ . Так что наш ответ правильный.

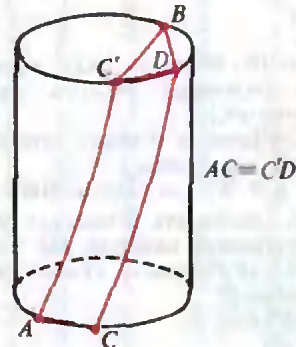


Рис. 1.



**Решения**

4. Сравнивая орбиты кометы и Земли с помощью III закона Кеплера, найдем большую полуось кометной орбиты:  $a=18,05$  а. е. Максимальное удаление от Солнца — около 35,5 а. е.

6. Посмотрим на рис. 2. За время прохождения дальней половины орбиты комета заметает площадь фигуры  $СВАВ'$ . Площадь этой фигуры —  $lab/2 + b(a-r_{\text{П}})$ . За интересующее нас время заметаются остатки от площади  $lab$ . Расчет дает 14,7 года.

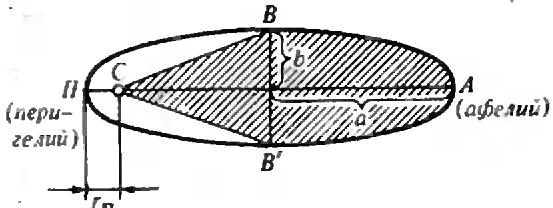


Рис. 2.

**Задача о трех синусах**

2.  $3\sqrt{6}$  см;  $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{4}$ .
3.  $\arcsin \left( \frac{\sin \varphi}{\sin \alpha} \right)$ .
4.  $\arcsin \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha \right)$ .
5.  $\frac{a^3 \sin \alpha}{24 \sqrt{\sin \left( \alpha + \frac{\pi}{3} \right) \sin \left( \frac{\pi}{3} - \alpha \right)}}$

**Решения к тесту.**

- с. 67)
1. 4.
  2. ЧАИ.
  3. ЧЕМОДАН.
  4. 11.
  5. ЖАБА.
  6. 21. (Сложите все цифры, стоящие вне скобок.)
  7. 3. (Каждое число получается, если к предыдущему прибавить 2 и результат разделить на 2:  $4+2=6$ ;  $6:2=3$ .)
  8. ТЕСТО.
  9. 6.
  10. И.
  11. ШОК.
  12. 54.
  13. 5.
  14. 11. (В каждом ряду третье число есть сумма половины первого числа с удвоенным вторым.)
  15. 27. (Число в скобках есть разность между числами вне скобок.)
  16. С и Е. (Слово СОМНЕНИЕ.)
  17. 18. (Возведите в квадрат числа 2, 3, 4, 5 соответственно, каждый раз прибавляя по 2.)
  18. 76. (Удвоенная сумма чисел, стоящих вне скобок.)
  19. КОЖА.
  20. ЛАД.
  21. СКУНС.

22. КИСТЬ.
  23. С. (Ряды построены из букв русского алфавита, соответственно через 2, 3, и 4 буквы.)
  24. 2. 25. ГРОТ. 26. ВИНТ. 27. 2.
  28. 64. (Возведите в куб числа 1, 2, 3 и 4 соответственно.)
  29. Е и Е. (Слово ЕДИНЕНИЕ.)
  30. ПОРТ. 31. ВТОРНИК. 32. Буква Ж и цифра 7.
  33. 1.
  34. 1. (Шипы, направленные наружу, считаются за +1; шипы, направленные внутрь, — за -1. В каждом горизонтальном ряду последняя фигура рассматривается как сумма двух предыдущих фигур:  $4-2=2$ ,  $-1+5=4$ ,  $2+2=4$ .)
  35. 1. 36. 6. 37. 2. 38. ГУБА. 39. 1. 40. РОСА.
- Решения для младших школьников**  
(«Квант» № 8)

1. 14 и 90. Решение. Пусть  $\overline{ab}=10a+b$  — интересующий нас номер. По условию  $(a+b)+ (a-b)^2=10a+b$ , т. е.  $(a-b)^2=9a$ . Отсюда  $a$  — полный квадрат, т. е.  $a=1$ ,  $a=4$  или  $a=9$ . Перебрав эти возможности, находим, что  $a=1$  (тогда  $b=4$ ) и  $a=9$  (тогда  $b=0$ ).
2.  $(1+9+6+8+3)^2=19\ 683$ .
3. Нельзя. Доказательство. Расположим на плоскости один вырезанный треугольник внутри другого и опишем вокруг обоих треугольников окружности. Меньший треугольник лежит внутри обеих окружностей: в одну он вписан сам, а в другую вписан треугольник, внутри которого он расположен. Значит, вершины меньшего треугольника лежат на дуге одной окружности, расположенной внутри другой окружности (рис. 3). Поскольку окружности одинаковые, эта дуга меньше  $180^\circ$ . Мы видим, что один из углов меньшего треугольника опирается на дугу окружности, большую  $180^\circ$ . Значит, этот угол тупой. Противоречие.
4. См. рис. 4.
5. 505; 500 050;  $n(n^2+1)/2$ . Решение. Чтобы решить эту задачу, достаточно знать, что сумма  $1+2+\dots+n$  равна  $\frac{n(n+1)}{2}$ . В самом деле, последнее число в  $(n-1)$ -й строчке нашего «треугольника» равно  $\frac{(n-1)n}{2}$ , а последнее

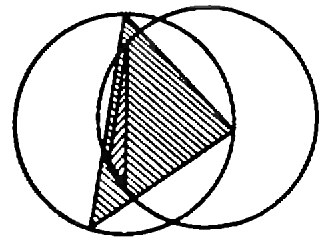


Рис. 3.

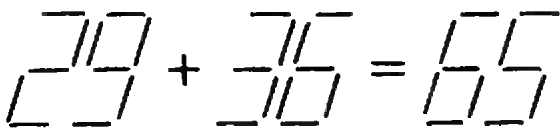


Рис. 4.

число в  $n$ -й строчке равно  $\frac{n(n+1)}{2}$ . Значит, сумма чисел в первых  $n-1$  строчках равна  $1+2+\dots+\frac{(n-1)n}{2} =$

$$= \frac{1}{2} \frac{(n-1)n}{2} \left( \frac{n(n-1)}{2} + 1 \right),$$

сумма чисел в первых  $n$  строчках равна  $1+2+\dots+\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2} \frac{n(n+1)}{2} \left( \frac{n(n+1)}{2} + 1 \right)$ .

Сумма же чисел в  $n$ -й строчке равна разности второй и первой сумм, т. е.

$$\frac{1}{2} \frac{n(n+1)}{2} \left( \frac{n(n+1)}{2} + 1 \right) - \frac{1}{2} \frac{(n-1)n}{2} \left( \frac{n(n-1)}{2} + 1 \right) = \frac{n(n^2+1)}{2}$$

Микроскоп «Кванта»  
«Квант» № 8/

**Вопросы и задачи**

1. Однозначного ответа нет, если неизвестны размеры шаров и время их прихода к точке пересечения траекторий.
2. Пять.
3.  $2l$ .
4. Вектор перемещения направлен вниз, его модуль равен 1 см.
5. См. рис. 5.
6. Синусоида или косинусоида.
7. По отрезку прямой, лежащему на линии, совпадающей с направлением распространения волны.

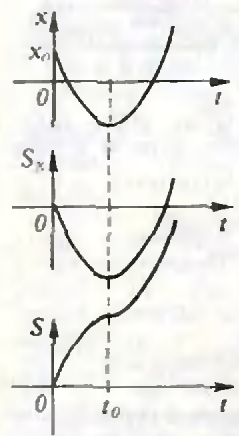


Рис. 5.



Рис. 6.

8. а) По параболам; б) если скорость мяча относительно вагона равна по модулю скорости поезда относительно земли, то по вертикали; в остальных случаях — по параболам.

9. По параболе.

10. Такие точки есть на реборде колеса. Траектория одной из этих точек изображена на рис. 6. Она называется циклоидой.

11. См. рис. 7.

12. Осколки окажутся на поверхности раздувающейся со скоростью  $v_0$  сферы, центр которой опускается с ускорением  $g$ . При этом каждый осколок движется по своей параболе.

**Микроопыт**

- а) по дуге окружности, лежащей в вертикальной плоскости;
- б) по горизонтальной окружности (конический маятник).

**АНКЕТА 9-89**

**Дорогой читатель!**  
Третий раз мы помещаем нашу ежеквартальную анкету. Мы обращаемся к Вам с просьбой. Ответьте, пожалуйста, на вопросы анкеты (на те, на которые Вы хотите и можете ответить), вырежьте анкету и пришлите в редакцию; на конверте напишите «АНКЕТА 9—89». Очень надеемся на обратную связь. Благодарим всех читателей, приславших ответы на анкеты «3—89» и «6—89».

1. Класс, в котором Вы учитесь: \_\_\_\_\_

Ваша профессия (если Вы работаете): \_\_\_\_\_

круг Ваших интересов: физика, математика, астрономия, космонавтика, информатика (подчеркните).

2. Какие разделы журнала для Вас наиболее интересны? \_\_\_\_\_

Главный редактор —  
академик Ю. А. Оснпьян

Заместители главного редактора:  
В. Н. Боровишки, А. А. Варламов,  
В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия:

А. А. Абрикосов, М. И. Башмаков,  
В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский,  
А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов,  
Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко,  
Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский,  
А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, С. М. Козел,  
С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, А. А. Леонович,  
С. П. Новиков, Т. С. Петрова, М. К. Потапов,  
В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов,  
А. П. Савин, Я. А. Смородинский,  
А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет:

А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Е. П. Велихов,  
И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский,  
Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева,  
Ю. Б. Иванов, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин,  
Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаяев,  
В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев,  
А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков,  
Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили:

А. И. Буздин, А. Н. Виленкин, А. А. Егоров, Л. В. Кардасевич,  
И. Н. Клаумова, Т. С. Петрова, С. Л. Табачников,  
В. А. Тихомирова

Номер оформили:

М. В. Дубах, Д. А. Крымов, С. Ф. Луккин, И. Е. Смирнова,  
Л. А. Тышков, П. И. Чернуцкий, О. Н. Эстис, В. Б. Юдин

Редактор отдела художественного оформления  
С. В. Иванов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Корректор О. М. Березина

103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1.  
«Квант», тел. 250-33-54

Сдано в набор 26.6.89. Подписано к печати 18.8.89. Т-15828  
Формат 70×100/16. Вумага офс. № 1.  
Гарнитура школьная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 6,5  
Усл. кр. отт. 27,30. Уч.-изд. л. 7,82. Тираж 184040 экз.  
Заказ 1438. Цена 45 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени  
Чеховский полиграфический комбинат  
Государственного комитета СССР  
по печати  
142300, г. Чехов Московской области

## АНКЕТА 9-89

3. Какие статьи и задачи из номеров 7—9 (номер укажите) Вам понравились? \_\_\_\_\_

Вы использовали при подготовке к уроку? \_\_\_\_\_

4. Решаете ли Вы задачи из «Задачника «Кванта»? \_\_\_\_\_

Участвуете ли Вы в конкурсе «Задачник «Кванта»? \_\_\_\_\_

5. Вам больше всего понравилась обложка номера \_\_\_\_\_

иллюстрация из номера \_\_\_\_\_, страница \_\_\_\_\_

6. Ваши общие замечания и пожелания: \_\_\_\_\_



Сер 11-15

На этой страничке мы приводим два способа складывания куба из бумажного квадрата без ножниц и клея. Первый способ придуман автором уже знакомых нам оригами — моделей тетраэдра и октаэдра (см. «Квант» № 7 и № 8) профессором К. Хага. Отличительная черта его моделей — отсутствие лишних сгибов на их поверхности. Рисунок 1 — это исходная «разметка» квадрата, на которой, как и в предыдущих публикациях, указаны все линии сгибов, причем красный цвет означает «хребты», а синий — «ущелья». На первом шагу квадрат превращается в прямой трехгранный угол (рис. 2). На дальнейших этапах модель перегибается по цветным линиям каждого очередного рисунка. Для контроля те квадратики исходного разбиения, которые в итоге образуют поверхность куба,

отмечены звездочками. Квадратики с диагональными складками превратятся в треугольные клапаны (рис. 4, 5), вставляемые в соответствующие карманы. Вторую модель изобрел Ш. Фудзимота. Мы приводим только «разметку» (рис. 7) и окончательный вид кубика (рис. 8). Уверены, что вы по достоинству оцените изящество этой конструкции, если сумеете восстановить последовательность складывания. (Подсказка: первое складывание — по средней линии AA, затем — по линиям 1 и, далее, по линиям 2, после чего линия DABCD сворачивается в квадрат. На последнем этапе из квадратов нижнего ряда складываются треугольные клапаны, которые, переплетаясь, образуют основание куба.)

В. Д.

